Application de la dérivée : Étude de croissance

Exemples 1) $f(x) = (x-1)e^{2x}$

- $ED(f) = \mathbb{R}$
- zéro(s) et signe : $\underset{\downarrow\,1}{(x-1)}\underbrace{e^{2x}}_{>0} = 0 \iff x = 1$

x		1	
$sgn(f)$	$-$	0	$+$

- croissance : $f'(x) = 1\cdot e^{2x} + (x-1)\cdot 2e^{2x}$

$u = x-1$ $\quad v = e^{2x}$

$u' = 1$ $\quad v' = e^{2x}\cdot 2 = 2e^{2x}$

$$= e^{2x} + 2e^{2x}(x-1)$$
$$= e^{2x}\left[1 + 2(x-1)\right]$$
$$= e^{2x}(2x-1)$$

vérif : en distribuant

$e^{2x}\left[1 + 2(x-1)\right]$

$= e^{2x} + 2e^{2x}(x-1)$ ✓

zéro(s) de f' : $\underbrace{e^{2x}}_{>0}\underset{\downarrow\, x=\frac{1}{2}}{(2x-1)} = 0$

(zéro(s) de f' : max, min ou palier)

crssce de f' :

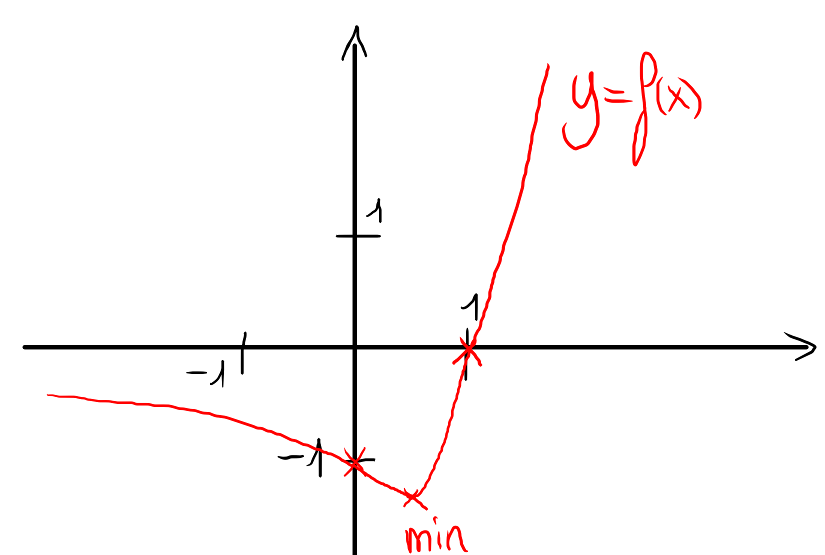
x		$1/2$	
~~$sgn(f')$~~	~~$-$~~	~~0~~	~~$+$~~
$crssce(f)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

← pas utile pour tracer le graphe

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}-1\right)e^{2\cdot\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}e^{1} = -\frac{1}{2}e$

$\Rightarrow \min\left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}e\right) \cong (0{,}5 ; -1{,}36)$

graphe



$f(0) = -1e^{0} = -1$

2) ex 1.1.6 k) $f(x) = x \cdot \ln(x) - x$ cond : $x > 0$

- $ED(f) =]0;+\infty[= \mathbb{R}_+^*$
- zéro(s) et signe : $x \cdot \ln(x) - x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (\ln(x) - 1) = 0$

$x = 0 \notin ED(f)$ | $\ln(x) = 1$ $|e^{()}$
$\Leftrightarrow x = e^1$
$\Leftrightarrow x = e$

x	0			e	
sgn(f)	‖	−	0	+	

$f(1) = -1$ $f(3) \cong \ldots$

- croissance : $f'(x) = (x \cdot \ln(x))' - 1$ dérivée de x

$u = x$ $v = \ln(x)$
$u' = 1$ $v' = \frac{1}{x}$

$= 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1$

$= \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$

zéro de f' : $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	0		1	
sgn(f')	‖	−	0	+
crssce(f)	‖	↘	min	↗

$\to f(1) = -1 \Rightarrow$ min$(1;-1)$