Ex 2.8.1

a) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} = \dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$

zéro : -2 et ~~1~~ (2)

cond : $(x+3)(x-1) \neq 0$ → -3 ; 1 (v.i.)

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-3;1\}$

2) signe :

x		-3		-2		1	
sgn(f)	+	‖	−	0	+	‖ (2)	+

3) AV/trou : $\lim_{x\to -3} f(x) = \text{“}\frac{4}{0}\text{”} = \infty \Rightarrow x=-3$ est une AV du type

$\lim_{x\to 1} f(x) = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{(x+3)\cancel{(x-1)}} = \frac{3}{4} \Rightarrow$ il y a un "trou" en $(1;\frac{3}{4})$

AH : $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}^{\,1}}{\cancel{x^2}_{\,1}} = 1 \Rightarrow y=1$ est une AH

position relative $\delta(x) = f(x) - 1 = \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} - \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+2x-3} = \dfrac{-x+1}{(x+3)(x-1)}$

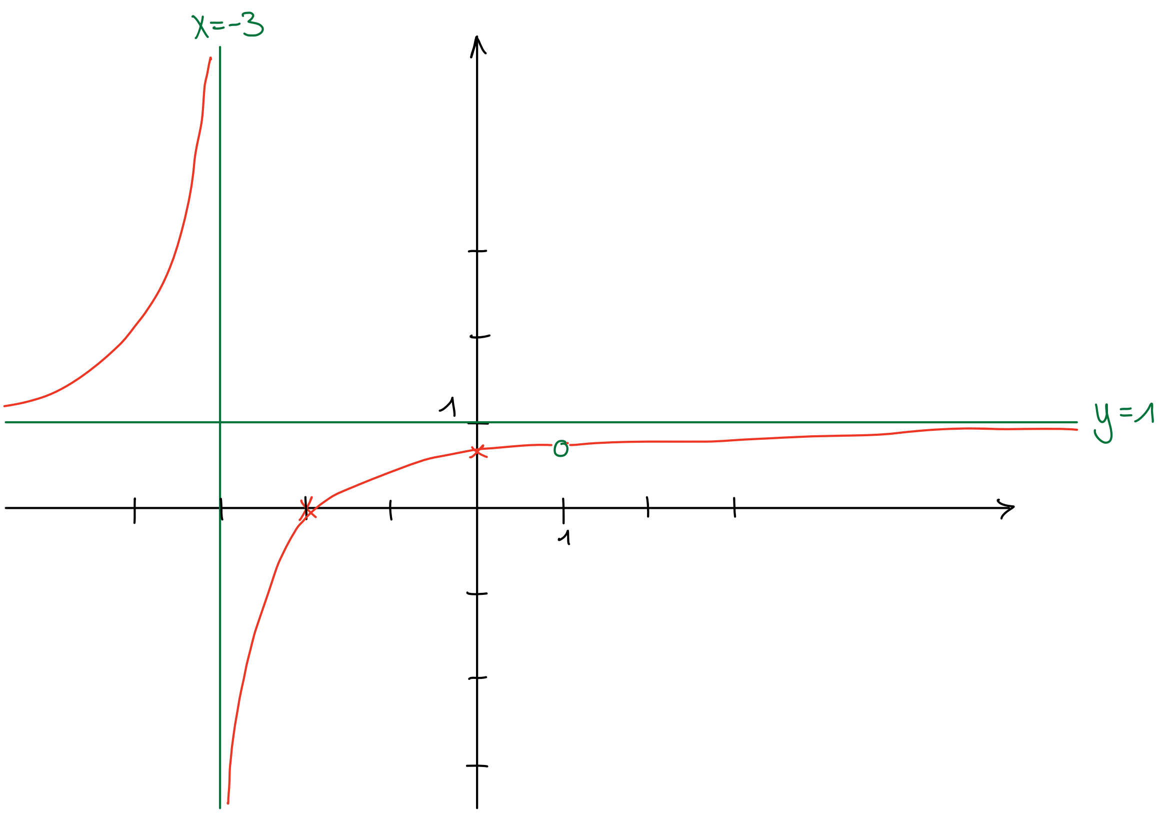
zéro : ~~1~~ de δ

m̂ v.i.

x		-3		1	
sgn(δ)	+	‖	−	‖ (2)	−
pos.	dessus	‖	dessous	‖	dessous

4) graphe :

ord. à l'or. : $f(0) = \frac{2}{3}$



b) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-2}$ ← $\Delta = -3 < 0$ pas de zéro
← v.i. : 2

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

2) signe de f :

x		2	
sgn(f)	$-$	‖	$+$

3) AV / trou : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = "\frac{7}{0}" = \infty \Rightarrow x = 2$ est une AV du type

AH/AO : $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} x = \infty \Rightarrow$ pas d'AH

AO car $\deg(N) = 2 = \deg(D) + 1 = 1 + 1$ ✓

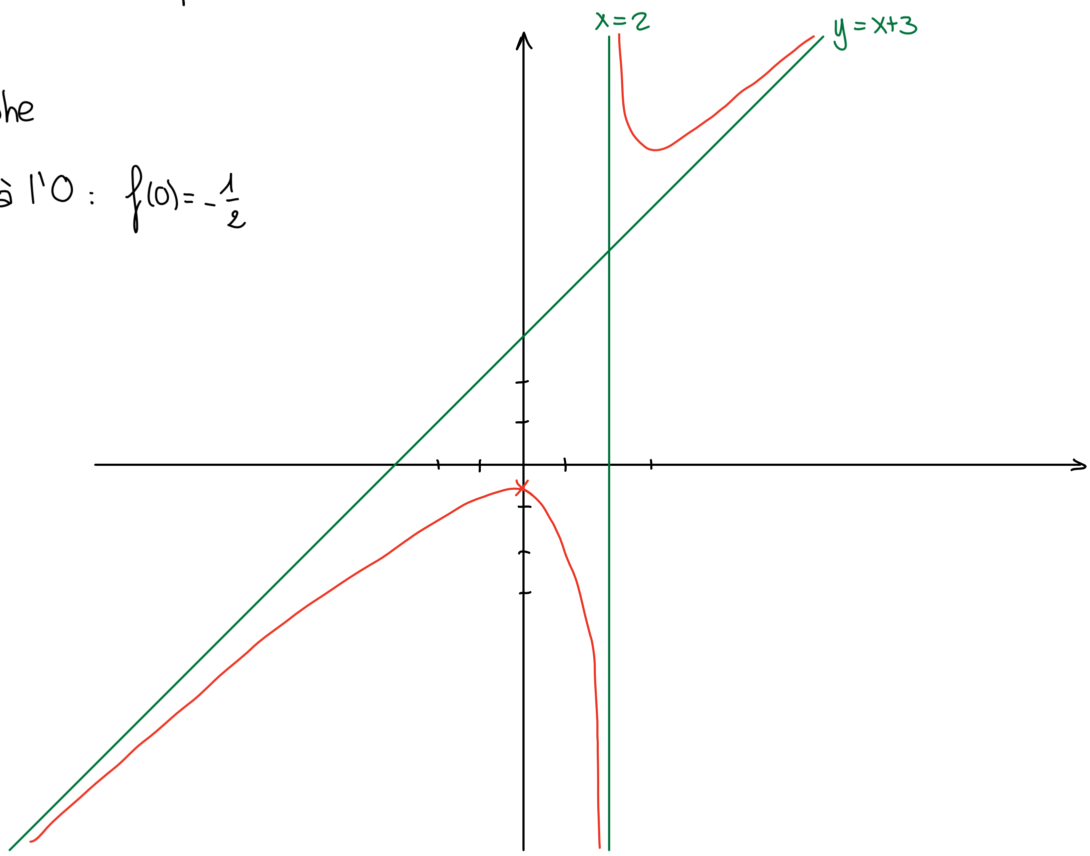
$$\begin{array}{r|l} x^2+x+1 & x-2 \\ \cline{2-2} -x^2+2x & x+3 \\ \cline{1-1} 3x+1 & \\ -3x+6 & \\ \cline{1-1} 7 & \end{array} \Rightarrow f(x) = x+3+\frac{7}{x-2}$$

$\Rightarrow y = x+3$ est l'AO et $\delta(x) = \dfrac{7}{x-2}$ ← pas de zéro
← v.i : 2

		2	
signe de δ :	$-$	‖	$+$
position de f p.r. à l'AO :	dessous	‖	dessus

4) graphe

ord. à l'O : $f(0) = -\frac{1}{2}$



c) $f(x) = \dfrac{2x^2+6x}{(x+2)^2} = \dfrac{2x(x+3)}{(x+2)^2}$

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$ cond : $(x+2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ (2)

2) signe : zéro : $2x(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -3$

x		-3		-2		0	
$\mathrm{sgn}(f)$	$+$	0	$-$	$\Vert$ (2)	$-$	0	$+$

AV/ trou : $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \dfrac{-4}{0_+} = -\infty \Rightarrow x = -2$ est une AV du type $\downarrow|\downarrow$

AH : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}_1} = 2 \Rightarrow y = 2$ est une AH

position relative :

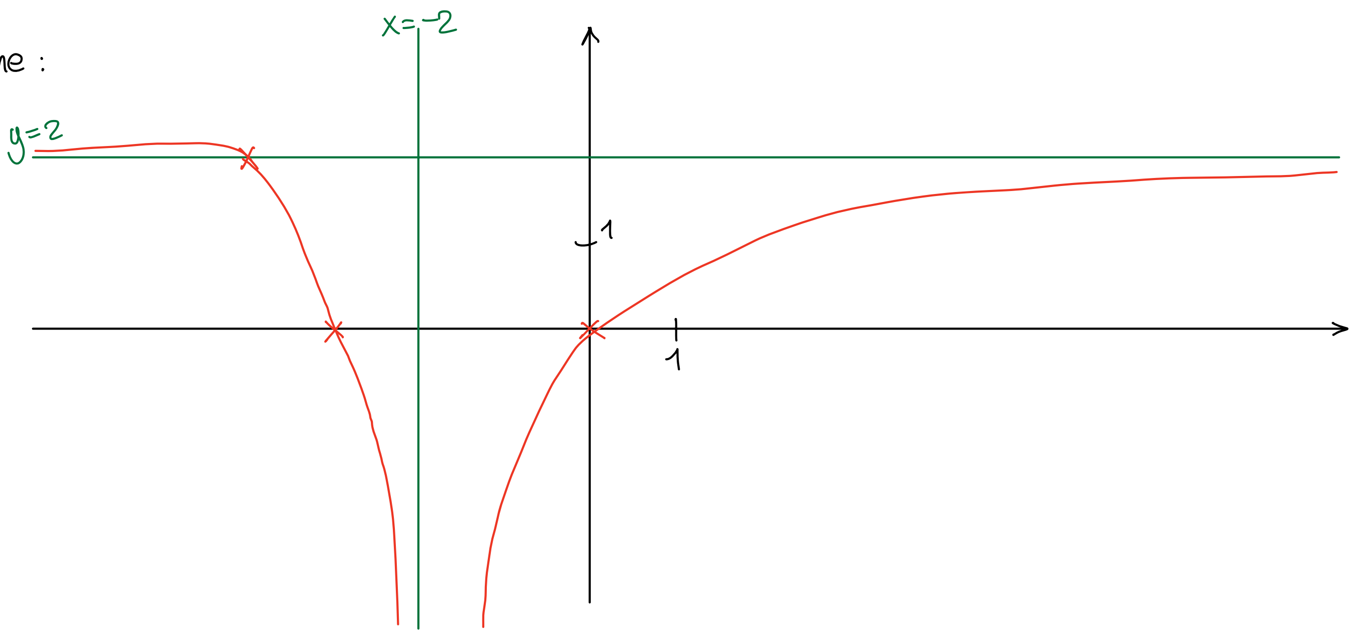
$\delta(x) = f(x) - 2 = \dfrac{2x^2+6x}{(x+2)^2} - \dfrac{2(x+2)^2}{(x+2)^2} = \dfrac{2x^2+6x-2x^2-8x-8}{(x+2)^2}$

$= \dfrac{-2x-8}{(x+2)^2} = \dfrac{-2(x+4)}{(x+2)^2}$ zéro : -4
v.i. : -2 (2)

x		-4		-2	
$\mathrm{sgn}(\delta)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$
position	dessus	$\cap$	dessous	(2)	dessous

$\downarrow$
$(-4; 2)$ car $y = 2$

4. graphe :



d) $f(x) = \dfrac{x^3}{4-x^2} = \dfrac{x^3}{(2-x)(2+x)}$ zéro : 0 (3)

v.i. : ± 2

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

2) signe

x		-2		0		2	
$sgn(f)$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$

3) AV/trou : $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \text{"}\dfrac{-8}{0}\text{"} = \infty \Rightarrow x = -2$ est une AV du type

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \text{"}\dfrac{8}{0}\text{"} = \infty \Rightarrow x = 2$ est une AV du type

AH/AO : AO car $\deg(N) = 3$ et $\deg(D) = 2$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & -x^2+4 \\ \hline -x^3+4x & -x \\ \hline 4x & \end{array}$$

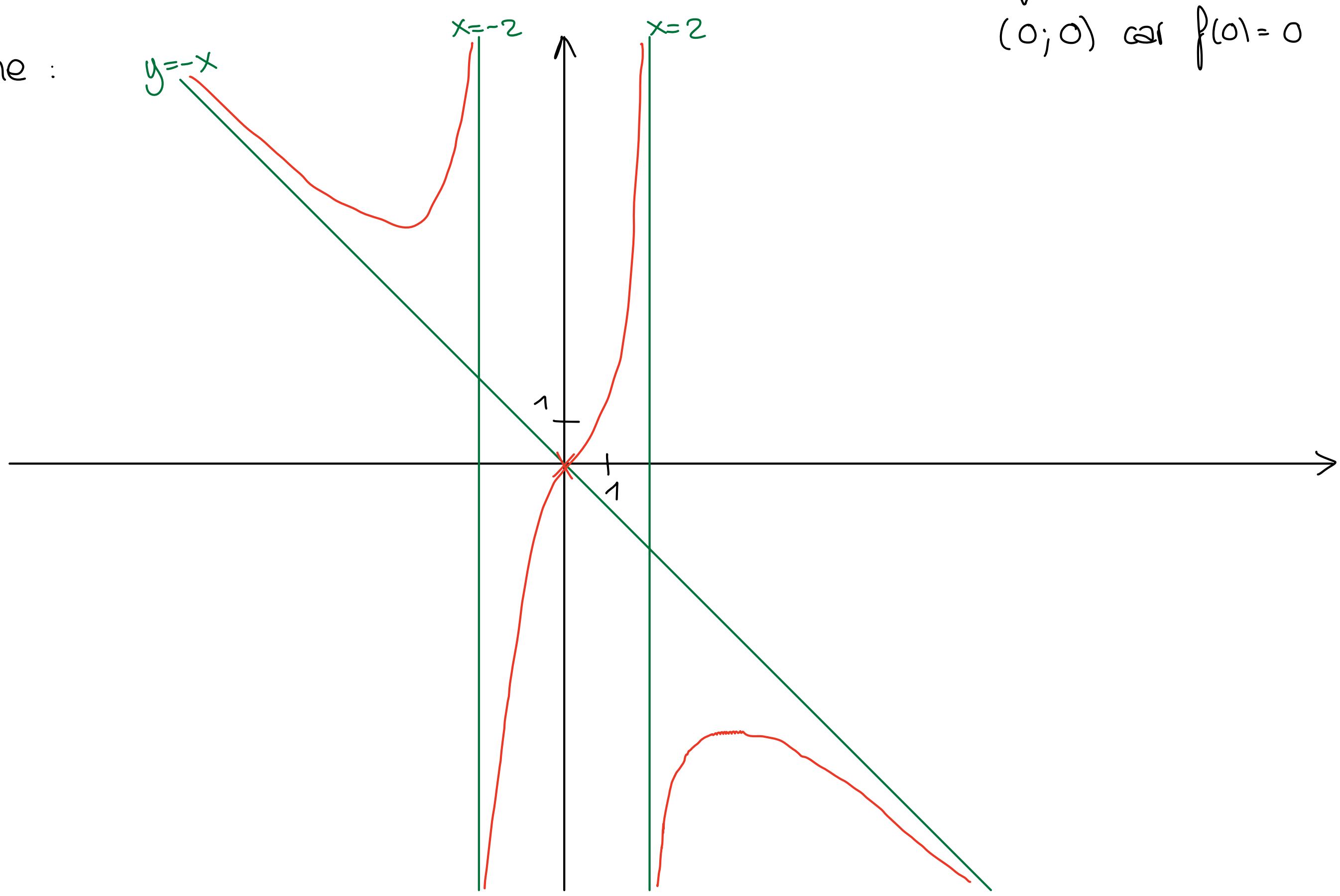
$\Rightarrow f(x) = -x + \dfrac{4x}{4-x^2}$

$\Rightarrow$ AO : $y = -x$ et

x		-2		0		2	
$sgn(\delta)$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$
position	dessus		dessous	$\cap$	dessus		dessous

$(0;0)$ car $f(0) = 0$

4) graphe :



e) $f(x) = \dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3} = \dfrac{x(x-4)}{(x-1)(x-3)}$ ← zéro : 0 et 4 ; ← v.i. 1 et 3

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{1;3\}$

2) signe :

x		0		1		3		4	
$\mathrm{sgn}(f)$	+	0	−	‖	+	‖	−	0	+

3) AV / trou : $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \dfrac{-3}{0} = \infty \Rightarrow$ $x=1$ est une AV

$\lim\limits_{x\to3} f(x) = \dfrac{-3}{0} = \infty \Rightarrow$ $x=3$ est une AV

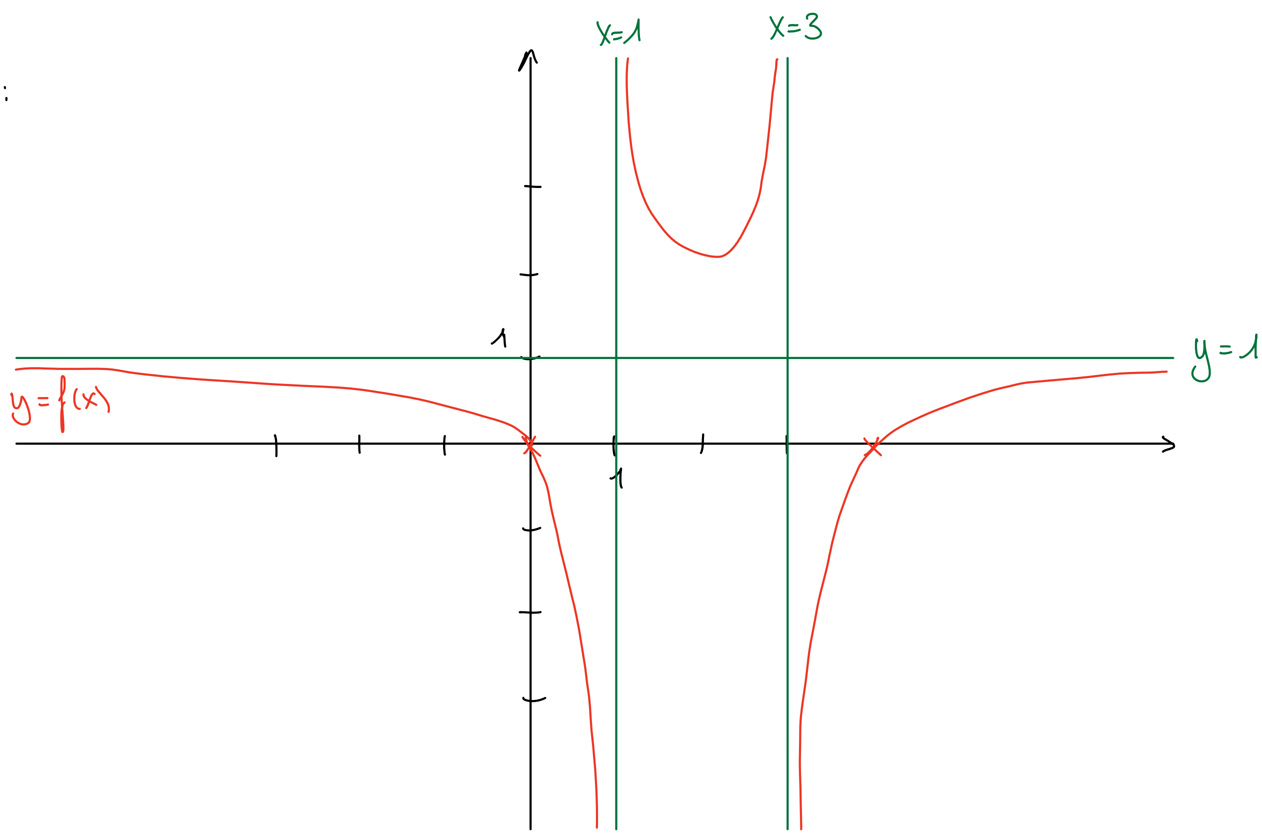
AH : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x^2}^{\,1}}{\cancel{x^2}_{\,1}} = 1 \Rightarrow$ $y=1$ est une AH

$\delta(x) = f(x) - 1 = \dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3} - \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4x+3} = \dfrac{-3}{x^2-4x+3}$ ← pas de zéro ; ← v.i. : 1 et 3

signe de δ :

		1		3	
	−	‖	+	‖	−
pos. de f p.r. à l'AO.	dessous	‖	dessus	‖	dessous

4) graphe :



f) $f(x) = \dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-4} \overset{*}{=} \dfrac{(x-1)(x^2-2x-2)}{(x+2)(x-2)}$

$*$ avec Horner : 1 est un zéro : $1-3+2=0$

	1	-3	0	2
1		1	-2	-2
	1	-2	-2	‖ 0

1) v.i. : ± 2 $\Rightarrow$ $ED(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

2) zéro : $(x-1)(x^2-2x-2)$

$x-1$: 1 ; x^2-2x-2 : $\Delta = 12$

$\Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$

signe :

x		-2		$1-\sqrt{3}$		1		2		$1+\sqrt{3}$	
sgn(f)	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$

$f(1000)$: $\frac{+}{+}$

3) AV : $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \dfrac{"-18"}{0} = \infty = \begin{cases} x<-2 & -\infty \\ x>-2 & +\infty \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x=-2$ est une AV

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{"-2"}{0} = \infty \begin{cases} x<2 & +\infty \\ x>2 & -\infty \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x = 2$ est une AV

AO : pas d'AH mais AO car $\deg(N) = 3 = \deg(D)+1 = 2+1$

$$\begin{array}{rrr|l} x^3 & -3x^2 & +2 & x^2-4 \\ \cline{4-4} -x^3 & & +4x & x-3 \\ \cline{1-3} & -3x^2 & +4x+2 & \\ & +3x^2 & -12 & \\ \cline{1-3} & & 4x-10 & \end{array}$$

$\Rightarrow f(x) = x-3 + \dfrac{4x-10}{x^2-4}$

$\Rightarrow$ AO : $y = x-3$ et

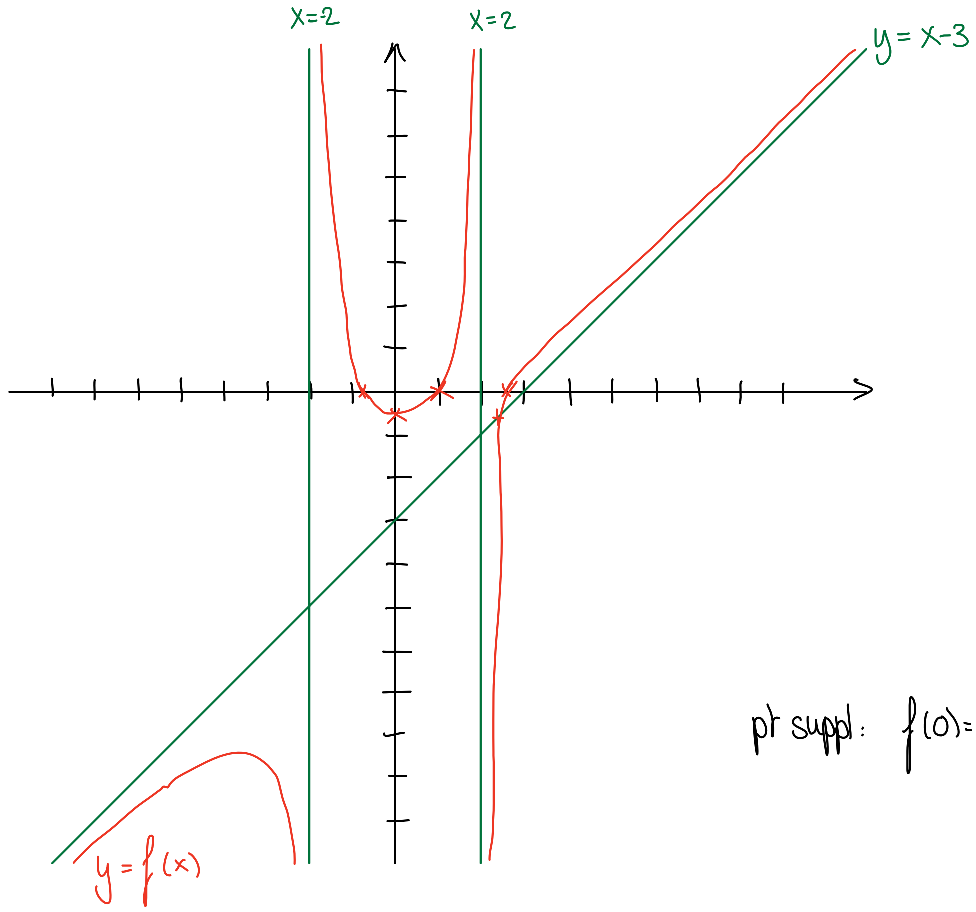
x		-2		2		$5/2$	
sgn(δ)	$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$
position	dessous	‖	dessus	‖	dessous	|	dessus

$\cap : \left(\frac{5}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$

$y = \frac{5}{2} - 3 = -\frac{1}{2}$

ou $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

4) graphe



pt suppl: $f(0) = \frac{1}{2}$ (0 à 0)

Ex 2.8.2

a) $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ cond : $\frac{x}{x+1} \geq 0$

x		-1		0	
	$+$	$\|$	$-$	0	$+$

$\Rightarrow \quad ED(f) = \left]-\infty ; -1\right[\cup \left[0 ; +\infty\right[$

AV : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -1 \cdot \text{"}\frac{1}{\underbrace{0}_{>0}}\text{"} = -\infty \Rightarrow$ $x = -1$ est une AV

v.i. au bord de l'ED(f) (pôle)

AH/AO

à gauche $(-\infty)$: $m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{x}{x+1}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{\cancel{x}\,1}{\cancel{x}(1+1/x)}} = 1$

$h = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}} - 1\right) = \infty \cdot (1-1) = \text{"}\infty \cdot 0\text{"}$ f.i.

$= \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}} - 1\right) \cdot \frac{\sqrt{\frac{x}{x+1}} + 1}{\sqrt{\frac{x}{x+1}} + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x\left(\frac{x}{x+1} - 1\right)}{\sqrt{\frac{x}{x+1}} + 1}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x \cdot \frac{x-(x+1)}{x+1}}{\sqrt{\frac{x}{x+1}} + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x \cdot \frac{-1}{x+1}}{\sqrt{\frac{x}{x+1}} + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\frac{-x}{x+1}}{\sqrt{\frac{x}{x+1}} + 1}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-\frac{\cancel{x}\,1}{\cancel{x}(1+1/x)}}{\sqrt{\frac{\cancel{x}\,1}{\cancel{x}(1+1/x)}} + 1} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$

à drte $(+\infty)$: idem (en remplaçant $-\infty$ par $+\infty$ ci-dessus on obtient les mêmes résultats)

$\Rightarrow \quad y = x - \frac{1}{2}$ est une AO

Ex 2.8.2

b) $f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$ $\qquad x^2-1 = (x+1)(x-1) \geqslant 0 \Rightarrow ED(f) =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$

pas d'AV

$\underline{x \to +\infty}$: $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x + \overset{x}{\widetilde{|x|}}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}$ $\quad \frac{1}{x^2} \to 0$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{\cdot}}\right)}{\cancel{x}} = 1+1 = 2$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sqrt{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+|x|}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = 2$

$h = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x+\sqrt{x^2-1}-2x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-1}-x\right) \overset{\text{"}+\infty-\infty\text{"}}{\underset{\text{f.i. (conjugué)}}{=}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-1}+x} = \dfrac{-1}{+\infty+\infty} = -\dfrac{1}{+\infty} = 0$

$\Rightarrow$ $y = 2x$ est une AOD

$\underline{x \to -\infty}$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x} \overset{\text{"}\frac{\infty+\infty}{-\infty}\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+\overset{-x}{\widetilde{|x|}}\sqrt{1-1/x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cancel{x}(1-\sqrt{1})}{\cancel{x}} = 0 = m$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \overset{-\infty+\infty}{\underset{\text{conjugué}}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-(x^2-1)}{x-\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x-\sqrt{\quad}} = \dfrac{1}{-\infty-\infty} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$

$\Rightarrow$ $y = 0$ est une AHG

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x-3}}$ cond : $\dfrac{1}{x-3} \geq 0$

x		3	
$\frac{1}{x-3}$	$-$	‖	$+$

$ED(f) =]3\,;+\infty[$

AV : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = \text{"}\sqrt{\dfrac{1}{0}}\text{"} = +\infty \Rightarrow$ AV en $x = 3$

v.i. au bord de l'ED(f) (pôle)

AH/AO

à G. : ╱ vu l'ED(f)

à D : $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sqrt{\frac{1}{\infty}}}{\infty} = \dfrac{\sqrt{0}}{\infty} = \dfrac{0}{\infty} = 0$ (pente nulle $\Rightarrow$ AH.)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{\infty}} = 0 \Rightarrow$ AHD en $y = 0$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{(x-3)^2}}$ cond : $\dfrac{1}{(x-3)^2} \geq 0$

x		3	
$\frac{1}{(x-3)^2}$	$+$	‖	$+$

$ED(f) = \mathbb{R} - \{3\}$

AV : $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \text{"}\sqrt{\dfrac{1}{0}}\text{"} = +\infty \Rightarrow$ AV en $x = 3$

AH/AO :

à G et à D : $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sqrt{\frac{1}{\infty}}}{\infty} = \dfrac{\sqrt{0}}{\infty} = \dfrac{0}{\infty} = 0$ (pente nulle $\Rightarrow$ AH.)

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{\infty}} = 0 \Rightarrow$ AHD en $y = 0$

Ex 2.8.2

e) $f(x) = 2x-3-\sqrt{4x^2+6x}$ cond: $4x^2+6x \geqslant 0$

$2x(2x+3) \geqslant 0$

$\downarrow 0 \qquad \downarrow -\frac{3}{2}$

$ED(f) =]-\infty ; -\frac{3}{2}] \cup [0 ; +\infty[$

pas d'AV

AH/AO

à G : $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - (+\infty) = -\infty \right.$ pas d'AHG $\left. \right)$

$m = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-3-\sqrt{4x^2+6x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{\overbrace{|2x|}^{-2\cancel{x}}\sqrt{1+\frac{3}{2x}}}{\cancel{x}}\right)$

$= 2 - 0 + 2\sqrt{1+0} = 4$

$h = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(2x-3-\sqrt{4x^2+6x} - 4x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-2x-3-\sqrt{4x^2+6x}\right) \overset{\text{"}\infty-\infty\text{"}}{=}$

$= -3 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\left(-2x-\sqrt{4x^2+6x}\right)\left(-2x+\sqrt{4x^2+6x}\right)}{\left(-2x+\sqrt{4x^2+6x}\right)} = -3 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^2-(4x^2+6x)}{\left(-2x+\sqrt{4x^2+6x}\right)}$

$= -3 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-6x}{-2x+\underbrace{|2x|}_{-2x}\sqrt{1+\dots}} = -3 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\overset{3}{+\cancel{6x}}}{+\cancel{2x}(1+\sqrt{1+\dots})} = -3 + \frac{3}{1+1} = -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ AOG $y = 4x - \frac{3}{2}$

à D : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x-3-\sqrt{4x^2+6x}\right) = +\infty \overset{\text{f.i.}}{-} (+\infty) = -3 + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^2-(4x^2+6x)}{2x+\sqrt{4x^2+6x}}$

conjugué

$= -3 + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-6x}{2x+\underbrace{|2x|}_{+2x}\sqrt{1+\frac{3}{2x}}} = -3 + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\overset{-3}{\cancel{-6x}}}{\cancel{2x}(1+\sqrt{1+\dots})} = -3 - \frac{3}{1+\sqrt{1}} = -\frac{9}{2}$

$\Rightarrow$ AHD $y = -\frac{9}{2}$

2.8.5 Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, les asymptotes de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^n+3}{x^2-9}$. $= \dfrac{x^n+3}{x^2-9}$ $\qquad n \in \mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$

$ED(f) = \mathbb{R} - \{\pm 3\}$

$\underline{n=0}$ $\quad f(x) = \dfrac{4}{x^2-9}$

AV/trou : $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \text{"}\dfrac{4}{0}\text{"} = \infty \implies$ AV en $x=3$

$\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \text{"}\dfrac{4}{0}\text{"} = \infty \implies$ AV en $x=-3$

AH/AO : $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{4}{\infty} = 0 \implies$ AH en $y=0$

$\underline{n=1}$ $\quad f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-9}$

AV/trou : $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \text{"}\dfrac{6}{0}\text{"} = \infty \implies$ AV en $x=3$

$\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{(x+3)(x-3)} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{1}{-3-3} = \dfrac{1}{-6} \implies$ "trou" $\left(-3; -\frac{1}{6}\right)$

AH : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\infty} = 0 \implies$ AH en $y=0$

$\underline{n=2}$ $\quad f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-9}$

AV : $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \text{"}\dfrac{12}{0}\text{"} = \infty \implies$ AV en $x=3$

$\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \text{"}\dfrac{12}{0}\text{"} = \infty \implies$ AV en $x=-3$

AH : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x^2}^{\,1}}{\cancel{x^2}_{\,1}} = 1 \implies$ AH en $y=1$

$\underline{n=3}$ $\quad f(x) = \dfrac{x^3+3}{x^2-9}$

AV : $x=3$ et $x=-3$

AO :
$$\begin{array}{r|l} x^3+3 & x^2-9 \\ \cline{2-2} -x^3+9x & x \\ \hline 9x+3 & \end{array}$$
$\implies y = x$ AO

$\underline{n>3}$ $\quad$ AV : $x=3$ et $x=-3$ et ni AH ni AO $\quad (\deg(N) > \deg(D)+1)$

Ex 2.8.6

$$f(x) = \frac{ax^2 + 6x + 8}{x^2 + bx + c}$$

AV : $x = 0$ et $x = 2$ $\Rightarrow$ 0 et 2 sont des v.i.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\cdots}{x(x-2)} = \frac{\cdots}{x^2 - 2x}$$

$$\Rightarrow b = -2 \text{ et } c = 0$$

AH : $y = 1$ $\Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{ax^2}{x^2} = 1 \Leftrightarrow a = 1$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - 2x}$$

Ex 2.8.7

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx}{x + c}$$

AV: $x = 3$ $\Rightarrow$ 3 est une v.i. $\Rightarrow f(x) = \frac{\cdots}{x-3} \Rightarrow c = -3$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{ax^2 + bx}{x - 3}$$

AO: $y = x + 2$

$$m = 1 = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 + bx}{x^2 - 3x} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{a\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = a \Leftrightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + bx}{x - 3}$$

$$h = 2 = \lim_{x \to \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + bx}{x - 3} - x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + bx - x(x-3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(b+3)x}{x - 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{(b+3)\cancel{x}}{\cancel{x}} = b + 3 \Leftrightarrow b + 3 = 2$$

$$\Leftrightarrow b = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 3}$$

ou

$$\begin{array}{l|l} ax^2+bx & x-3 \\ \hline & x+2 \end{array} \Rightarrow a=1$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l|l} x^2+bx & x-3 \\ -x^2+3x & x+2 \\ \hline (b+3)x & \end{array}$$

$\hookrightarrow b+3=2 \Rightarrow b=-1$

ou

$$f(x) = x+2+\frac{d}{x-3} = \frac{(x+2)(x-3)+d}{x-3}$$

$$= \frac{x^2-x-6+d}{x-3} = \frac{ax^2+bx}{x-3}$$

$\Rightarrow a=1,\ b=-1$ (et $-6+d=0 \Leftrightarrow d=6$)

Ex 2.8.8

$$f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x+d}$$

AV : $x=-3 \Rightarrow -3$ est une v.i. $\Rightarrow f(x) = \frac{\cdots}{x+3} \Rightarrow d=3$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x+3}$$

AO : $y=-2x+1$

$$m=-2 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+c}{x^2+3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2}{x^2} = a \Rightarrow a=-2$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-2x^2+bx+c}{x+3}$$

$$h=1 = \lim_{x\to\infty}\left(f(x)+2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2+bx+c+2x(x+3)}{x+3}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(b+6)x+c}{x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{(b+6)x}{x} = b+6 \Rightarrow b+6=1$$

$$b=-5$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-2x^2-5x+c}{x+3}$$

$A(2;-2)$: $f(2)=-2 \Leftrightarrow \frac{-8-10+c}{5} = -2 \Leftrightarrow -18+c=-10$

$\Leftrightarrow c=8$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-2x^2-5x+8}{x+3}$$