1.4 Norme et produit scalaire

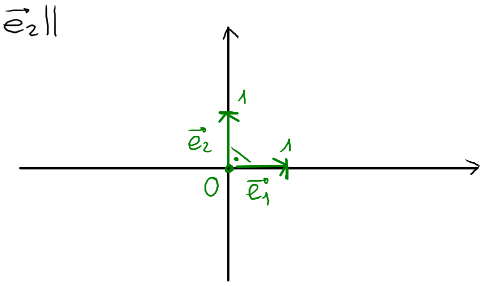
Norme

Rappel
La norme d'un vecteur $\vec{a}$, noté $\|\vec{a}\|$, est la longueur de l'un de ses représentants.

Définition 1.
Un vecteur est **unitaire** si sa norme égale à 1. $\|\vec{a}\| = 1$

Définition 2.
Deux vecteurs non nuls dont les directions sont perpendiculaires sont **orthogonaux**, on note $\vec{a} \perp \vec{b}$.

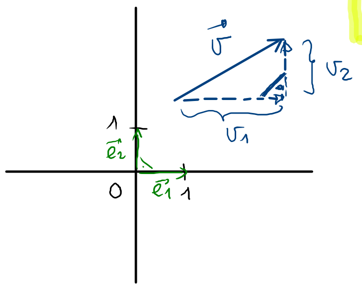
Définition 3.
Un **repère** $\mathcal{R} = (O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$ est **orthonormé** si les vecteurs de base sont orthogonaux et unitaires. $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$ et $\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\|$



Convention
Les bases et repères sont dorénavant orthonormés, sauf mention contraire.

Théorème 1.

$$\boxed{\|\vec{v}\| = \left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

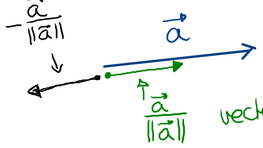


C'est Pythagore

Remarques
1. Le théorème ci-dessus est faux si la base n'est pas orthonormée.
2. Pour calculer la distance entre deux points A et B du plan, on calcule $\|\overrightarrow{AB}\|$.
3. Si $\vec{a} \neq \vec{0}$,

$\vec{u} = \dfrac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$ est unitaire, de même direction et de même sens que $\vec{a}$

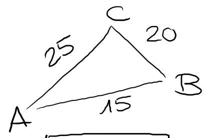
$\vec{u} = -\dfrac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$ est unitaire et de même direction que $\vec{a}$ mais de sens opposé.



vecteur unitaire de même sens et de même direction que $\vec{a}$

Exemple 1.

On donne les points $A(-1;-9)$, $B(-10;3)$ et $C(6;15)$.

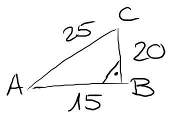


Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -10+1 \\ 3+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{AB}\| = \sqrt{(-9)^2+12^2} = \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15 \text{ u}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 6+1 \\ 15+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 24 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{AC}\| = \sqrt{49+576} = \sqrt{625} = 25 \text{ u}$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 6+10 \\ 15-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{BC}\| = \sqrt{256+144} = \sqrt{400} = 20 \text{ u}$$



Que peut-on dire de ce triangle ?

Il est rectangle car $25^2 = 15^2 + 20^2$

$625 = 625$ ✓

Donner un vecteur unitaire et de même direction que le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$$\vec{u} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/15 \\ 12/15 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = -\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/15 \\ -12/15 \end{pmatrix}$$

norme de $\vec{AB}$

Produit scalaire

Définition 4.

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, noté par $\vec{v} \cdot \vec{w}$, est le nombre réel :

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

Exemple 2.

Remarque

Le du produit scalaire est indépendant de la base orthonormée choisie.