Primitives et intégrales

1. Primitives

Intro : exple $F(x) = x^2 \xrightarrow{\text{dériver}} F'(x) = f(x) = 2x$

chercher une primitive

Déf : Une fonction F telle que $\boxed{F'(x) = f(x)}$ est appelée une primitive de la fonction f

Remarquons que $F(x) = x^2 + 1$ ou $F(x) = x^2 - 5$ sont aussi des primitives de $f(x)$, car la dérivée d'une constante est nulle.

Il existe pour une fonction f une infinité de primitives F, toutes de la forme $F(x) + c$ où $c \in \mathbb{R}$ (constante).

On note $\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c}$

On l'appelle l'intégrale indéfinie de f.

Exemples

A. 1) $\int 4\,dx = 4x + C$

$f(x) = 4 \underset{\text{dérivée}}{\overset{\text{primitive}}{\rightleftarrows}} F(x) = 4x$

2) $\int 4\,dt = 4t + C$

$f(t) = 4 \qquad F(t) = 4t$

$$\boxed{\int k\,dx = kx + C \qquad k \in \mathbb{R}}$$

preuve : $(kx)' = k$

3) $\int dx = x + C$

$f(x) = 1$

B. 1) $\int 2x \, dx = x^2 + c$

2) $\int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 + c$

$$f(x) = x \underset{\text{dérivée}}{\overset{\text{primitive}}{\rightleftarrows}} F(x) = \frac{1}{2}x^2$$

vérif : $\left(\frac{1}{2}x^2\right)' = \frac{1}{2}(x^2)' = \frac{1}{2}.2x = x$ ✓

3) $\int x^3 \, dx = \frac{1}{4}x^4 + c$

$$f(x) = x^3 \underset{\text{dérivée}}{\overset{\text{primitive}}{\rightleftarrows}} F(x) = \frac{1}{4}x^4$$

vérif : $\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = \frac{1}{4}(x^4)' = \frac{1}{4}.4x^3 = x^3$ ✓

$$\boxed{\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \qquad \text{si } n \neq -1}$$

preuve : $\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1}(n+1)x^{n+1-1} = x^n$

Propriétés

1) $\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$ avec u et v des fonctions de x

2) $\int ku\,dx = k\int u\,dx$ $k \in \mathbb{R}$ (un nombre)

Exemples

1) $\int (2x+4)\,dx = \int 2x\,dx + \int 4\,dx$

$= x^2 + 4x + C$

2) $\int \frac{5}{2}x^3\,dx = \frac{5}{2}\int x^3\,dx$

$= \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{4}x^4 + C$

$= \frac{5}{8}x^4 + C$

ex 1) → 5) feuille

1) $\frac{1}{6}x^6 + C$

2) $\frac{5}{4}x^4 + C$

3) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}x^5 + C = \frac{1}{10}x^5 + C$

une constante, $C \in \mathbb{R}$

4) $3u + C$ vérif : $(3u + C)' = 3 + 0 = 3$

ou $(3u + 3C)' = 3 + 0 = 3$

5) $t^3 + \frac{5}{2}t^2 - t + C$

3) $\displaystyle\int \frac{5}{x^4}\,dx = \int 5x^{-4}\,dx = 5\cdot\frac{1}{-4+1}x^{-4+1}+C = 5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-3}+C$

$$= -\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x^3}+C$$

$$\boxed{= -\frac{5}{3x^3}+C}$$

$$f(x)=\frac{5}{x^4}=5x^{-4} \xrightarrow{\text{primitive}} F(x) = -\frac{5}{3x^3}$$

$$F(x) \xrightarrow{\text{dérivée}} f(x)$$

vérif : $F'(x) = \left(-\frac{5}{3x^3}\right)' = -\frac{5}{3}\left(x^{-3}\right)' = -\frac{5}{3}\cdot(-3)\,x^{-3-1} = +5x^{-4} = f(x)$ ✓

4) $\displaystyle\int \sqrt[5]{x}\,dx = \int x^{1/5}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{5}+1}x^{\frac{1}{5}+1}+C = \frac{1}{\frac{6}{5}}x^{\frac{6}{5}}+C$

$$= \frac{5}{6}\sqrt[5]{x^6}+C$$

5) $\displaystyle\int \frac{4}{\sqrt{x^3}}\,dx = \int\frac{4}{x^{3/2}}\,dx = \int 4x^{-3/2}\,dx$

$$= 4\cdot\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}x^{-\frac{3}{2}+1}+C$$

$$= 4\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+C$$

$$= 4\cdot(-2)\cdot\frac{1}{x^{1/2}}+C = -8\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}+C = -\frac{8}{\sqrt{x}}+C$$

ex feuille 6) → 9)

ex 1.3.3 → h)

1.3.4 → g)