Primitives de fonctions exponentielles

Comme $(e^x)' = e^x$ et $(e^u)' = e^u \cdot u'$

$$\int e^x \, dx = e^x + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\int e^u \cdot u' \, dx = e^u + c}$$

exemples :

- $$\int e^{x+2} dx = e^{x+2} + c$$

  $u = x+2$
  $u' = 1$

- $$\int e^{3x+5} dx = \frac{1}{3} \int e^{3x+5} \cdot 3 \, dx = \frac{1}{3} e^{3x+5} + c$$

  $u = 3x+5$
  $u' = 3$

- $$\int x e^{3x^2+5} dx = \frac{1}{6} \int 6x \cdot e^{3x^2+5}$$

  $u = 3x^2+5$
  $u' = 6x$

Utilisation des fcts logarithmes dans les calculs de primitives

Comme $\left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{x}$ et $\left(\ln(u)\right)' = \frac{u'}{u}$

On en déduit $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + c$, $c \in \mathbb{R}$

et $\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln(|u|) + c$ avec u une fct. de x

exemples :

- $\int \frac{1}{x+3}\,dx = \ln(|x+3|) + c$

  $u = x+3$
  $u' = 1$

- $\int \frac{7}{x+3}\,dx = 7\ln(|x+3|) + c = \ln(|x+3|^7) + c$

- $\int \frac{10x}{5x^2+4}\,dx = \ln(|5x^2+4|) + c$

  $u = 5x^2+4$
  $u' = 10x$

- $\int \frac{15x^3+5}{3x^4+4x-1}\,dx = \frac{5}{4}\int \frac{4(3x^3+1)}{3x^4+4x-1}\,dx = \frac{5}{4}\ln(|3x^4+4x-1|) + c$

  $u = 3x^4+4x-1$
  $u' = 12x^3+4 = 4(3x^3+1)$

ex suppl. Prim. 15 → 20
+ ex 1.1.3
1.1.7 → d)

Rem : les fractions rationnelles pour lesquelles on utilise la fct log. ont forcément un numérateur de degré inférieur au numérateur (différence de 1)

$Deg(N) = Deg(D) - 1$

Que faire si ce n'est pas le cas? On divise

Exples 1) $\int \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{\underbrace{x^2}_{\text{monome}}} dx = \int \left(\frac{x^3}{x^2} - \frac{3x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} \right) dx = \int \left(x - 3 + \frac{2}{x} \right) dx$

$= \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 \ln(|x|) + C$

2) $\int \frac{2x^2 - x - 5}{\underbrace{2x-3}_{\text{polynôme}}} dx = \int \left(x + 1 - \frac{2}{2x-3} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 + x - \ln(|2x-3|) + C$

ex 1.1.7 e)
1.3.6 b)

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - x - 5 & 2x-3 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^2 + 3x} & x+1 \\ 2x - 5 & \\ \underline{-2x + 3} & \\ -2 & \end{array}$$

$\Rightarrow f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} = x + 1 + \frac{-2}{2x-3}$

En résumé

	$f(x)$	$F(x)$	$\int f(x)\,dx$
	k	kx	$kx + c$
$n \neq -1$	x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$
$n \neq -1$	$u^n \cdot u'$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$
	e^x	e^x	$e^x + c$
	$e^u \cdot u'$	e^u	$e^u + c$
$x^{-1} =$	$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert)$	$\ln(\lvert x \rvert) + c$
$u^{-1} \cdot u' =$	$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u \rvert)$	$\ln(\lvert u \rvert) + c$

k et c sont des constantes, nombres réels

$n \in \mathbb{N}$

u est une fonction de x par exple $u = 3x+1$