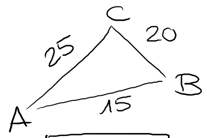
Exemple 1.
On donne les points $A(-1;-9)$, $B(-10;3)$ et $C(6;15)$.

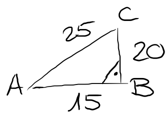


Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -10+1 \\ 3+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{AB}\| = \sqrt{(-9)^2+12^2} = \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15 \text{ u}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 6+1 \\ 15+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 24 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{AC}\| = \sqrt{49+576} = \sqrt{625} = 25 \text{ u}$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 6+10 \\ 15-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{BC}\| = \sqrt{256+144} = \sqrt{400} = 20 \text{ u}$$



Que peut-on dire de ce triangle ?

Il est rectangle car $25^2 = 15^2 + 20^2$

$625 = 625$ ✓

Donner un vecteur unitaire et de même direction que le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$$\vec{u} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/15 \\ 12/15 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = -\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/15 \\ -12/15 \end{pmatrix}$$

norme de $\vec{AB}$

Produit scalaire

Définition 4.
Le produit scalaire des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, noté par $\vec{v} \cdot \vec{w}$, est le nombre réel :

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2$$ ♡

Exemple 2.

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} = -8 + 15 = \underline{\underline{7}}$$

⚠ c'est un nombre

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -8 \\ 15 \end{pmatrix}$ FAUX

Remarque
Le produit scalaire est indépendant de la base orthonormée choisie.

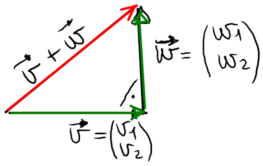
Théorème 2 (Condition d'orthogonalité).

$$\boxed{\vec{v} \perp \vec{w} \iff \vec{v} \cdot \vec{w} = 0}$$

♡

<u>preuve</u> :

$$\vec{v} \perp \vec{w} \iff \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 = \|\vec{v}+\vec{w}\|^2 \qquad \text{(Pythagore)}$$



$$\vec{v}+\vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff (v_1^2 + v_2^2) + (w_1^2 + w_2^2) = (v_1 + w_1)^2 + (v_2 + w_2)^2$$

$$\iff \cancel{v_1^2} + \cancel{v_2^2} + \cancel{w_1^2} + \cancel{w_2^2} = \cancel{v_1^2} + 2v_1w_1 + \cancel{w_1^2} + \cancel{v_2^2} + 2v_2w_2 + \cancel{w_2^2}$$

$$\iff 0 = 2v_1w_1 + 2v_2w_2$$

$$\iff 0 = 2(v_1w_1 + v_2w_2) \qquad |\div 2$$

$$\iff 0 = v_1w_1 + v_2w_2$$

$$\iff 0 = \vec{v} \cdot \vec{w}$$

CQFD
#

<u>Rem</u> : $\vec{0}$ est orthogonal à tous les vecteurs.
↑
vecteur nul.

Exemple 3.
On donne les points $A(-1;-9)$, $B(-10;3)$ et $C(6;15)$ (exemple 1.).

Vérifier que le triangle ABC est rectangle en utilisant le produit scalaire.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 24 \end{pmatrix} \qquad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -9 \cdot 16 + 12 \cdot 12 = -144 + 144 = 0$$

$$\iff \vec{AB} \perp \vec{BC}$$

$\Rightarrow$ Le ΔABC est rectangle en B.