Révision d'analyse I - Problèmes d'examens

Juin, 2015

On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = \frac{15e^x - 15}{e^x + 5}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

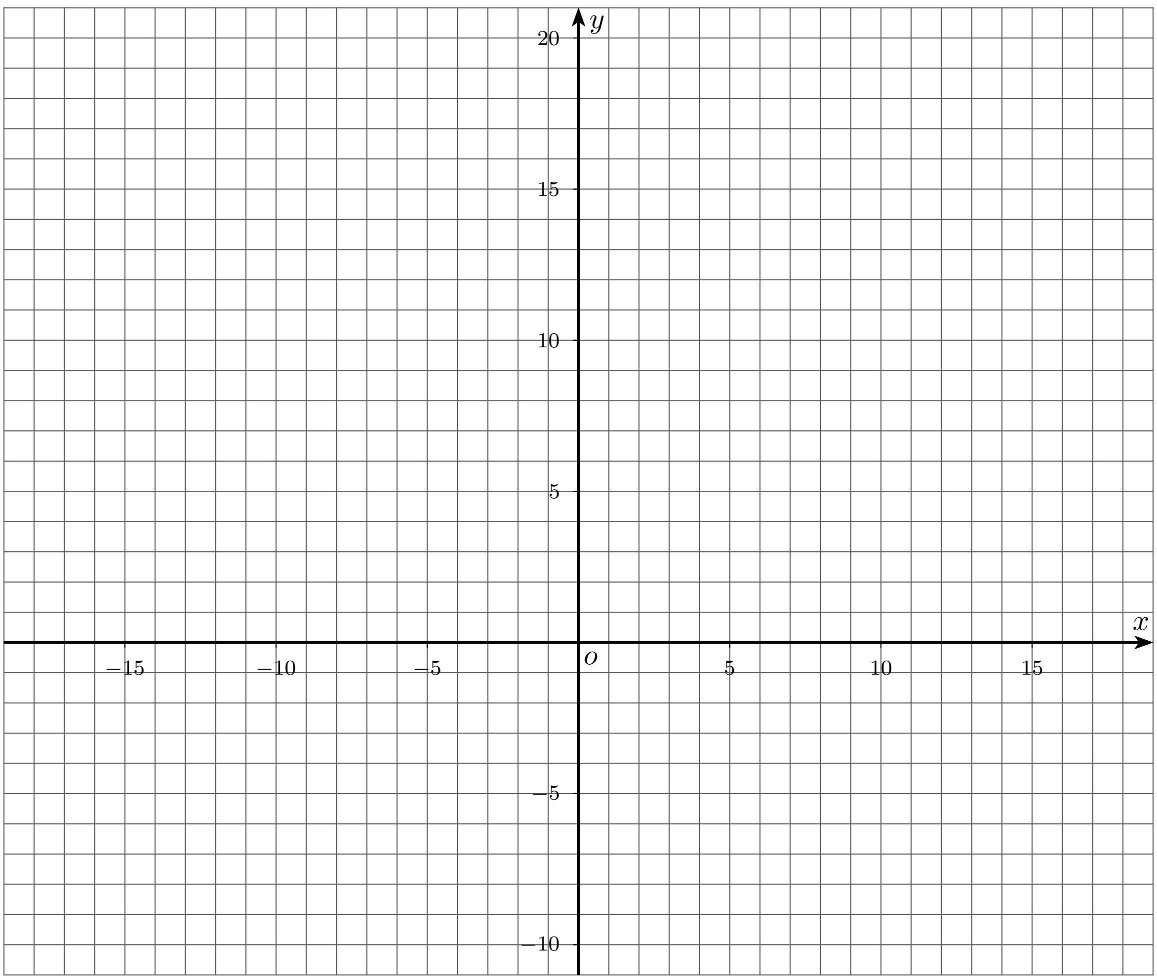
b) Calculer les éventuels zéros de f.

c) Etudier le signe de f.

d) Calculer la dérivée f' de f et étudier la croissance de f.

e) Déterminer, par calculs, les éventuelles asymptotes horizontales de f.

f) Représenter ci-dessous les éventuelles asymptotes horizontales de f ainsi que l'esquisse du graphe de cette fonction f à l'aide des informations récoltées ci-dessus.



Juin, 2016

1^e partie

Un bureau d'analyse a estimé que le bénéfice, en CHF, réalisé par une entreprise lorsqu'elle vend x objets est donné par la fonction f suivante :

$$f(x) = 2'000 \cdot (x - 100) \cdot \mathrm{e}^{-0,01x-1} + 10'000 \qquad \text{avec } x \geq 73$$

a) Calculer le bénéfice si l'entreprise vend 100 objets.

b) Calculer le bénéfice si l'entreprise vend 400 objets.

c) Montrer que $f'(x) = 2'000 \cdot \mathrm{e}^{-0,01x-1} \cdot (2 - 0,01x)$.

d) Déterminer quel doit être le nombre d'objets vendus pour que le bénéfice soit maximal et calculer ce bénéfice maximal.

2^e partie

Chaque question se résout indépendamment des autres. Les réponses doivent être détaillées.

a) Soit la fonction k définie par $k(x) = x^2 \cdot \ln(x)$.
Déterminer une équation de la tangente t à la courbe représentative de k en son point $T(1\,;\,?)$.

b) Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 0_+} x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}}$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2)}{x+1}$

c) Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$ n'a pas de zéro.

Corrigé 2015

Problème 4 (19 points)

a) $e^x + 5 > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{ED(f) = \mathbb{R}}$

b) $e^x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$ $\boxed{f \text{ a donc un unique zéro : } x = 0}$.

c) Etudions le signe de f :

x		0	
$f(x)$	$-$	0	$+$

d) $f'(x) = \left(\dfrac{15e^x - 15}{e^x + 5}\right)' = \dfrac{(15e^x - 15)'(e^x + 5) - (15e^x - 15)(e^x + 5)'}{(e^x + 5)^2} =$

$$\frac{15e^x(e^x + 5) - (15e^x - 15)e^x}{(e^x + 5)^2} = \frac{15e^x(e^x + 5 - (e^x - 1))}{(e^x + 5)^2} = \boxed{\frac{90e^x}{(e^x + 5)^2}}$$

Etudions la croissance de f :

x	
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

e) Recherche d'asymptote vers $+\infty$:

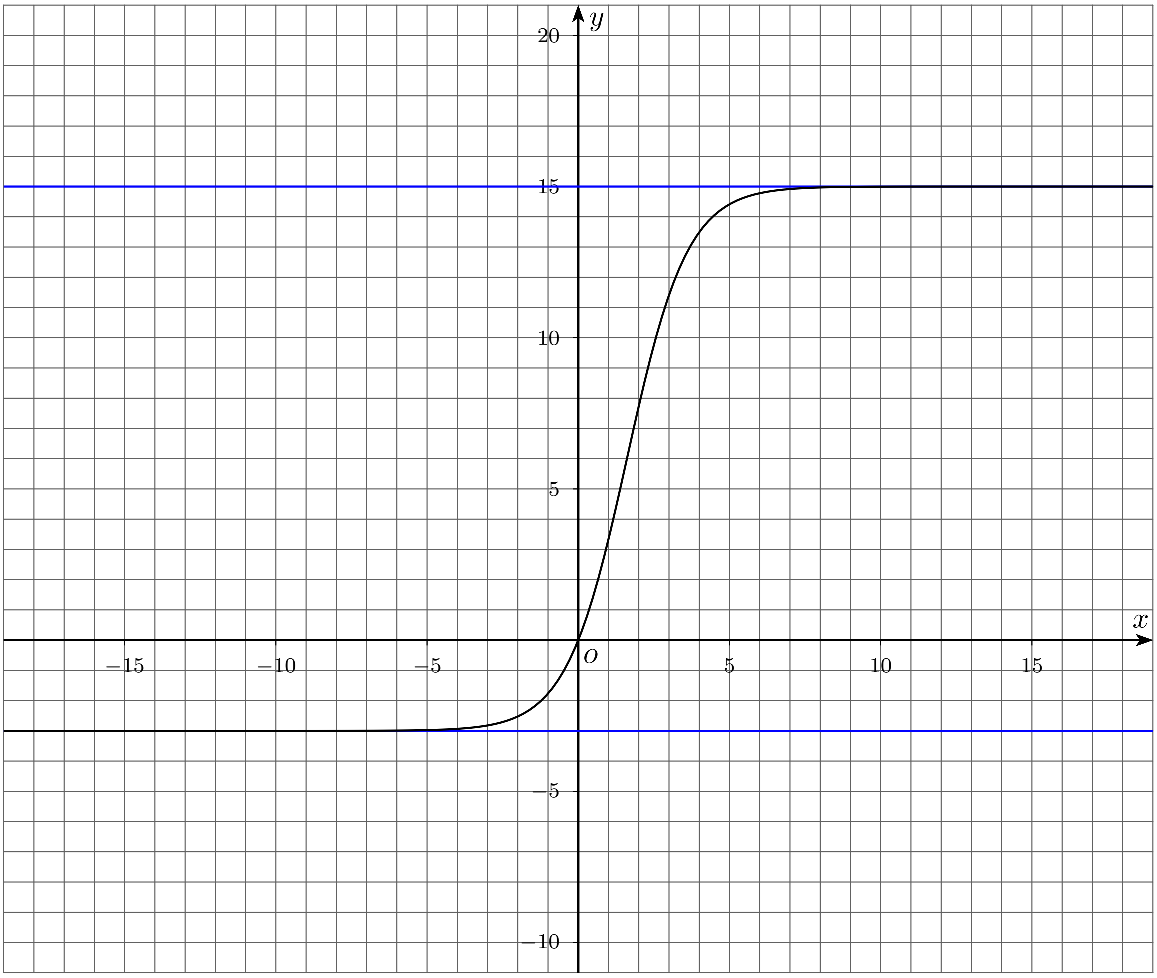
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{15(e^x - 1)}{e^x + 5} \overset{"\frac{\infty}{\infty}",B.H.}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{15e^x}{e^x} = 15$$

Ainsi f possède une asymptote horizontale vers $+\infty$ d'équation $\boxed{y = 15}$.

Recherche d'asymptote vers $-\infty$: $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{15(e^x - 1)}{e^x + 5} \overset{"\frac{-15}{5}"}{=} \frac{-15}{5} = -3$

Ainsi f possède une asymptote horizontale vers $-\infty$ d'équation $\boxed{y = -3}$.

f)



Corrigé 2016

1e partie (12 points)

a) $f(100) = 2'000 \cdot (100 - 100) \cdot \mathrm{e}^{-1-1} + 10'000 = 0 + 10'000 = \boxed{10'000 \text{ CHF}}$.

b) $f(400) = 2'000 \cdot (400 - 100) \cdot \mathrm{e}^{-4-1} + 10'000 = 2'000 \cdot 300 \cdot \mathrm{e}^{-5} + 10'000 \simeq$

$4'042{,}77 + 10'000 \simeq \boxed{14'042{,}75 \text{ CHF}}$.

c) $f'(x) = 2'000 \cdot [(x - 100) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01x-1}]' = *$

$u(x) = x - 100 \;\Rightarrow\; u'(x) = 1$

$v(x) = \mathrm{e}^{-0{,}01x-1} \;\Rightarrow\; v'(x) = \mathrm{e}^{-0{,}01x-1} \cdot (-0{,}01)$ car $(\mathrm{e}^u)' = \mathrm{e}^u \cdot u'$.

De plus, $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \;\Rightarrow$

$* = 2'000 \cdot [(1 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01x-1} + (x - 100) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01x-1} \cdot (-0{,}01)] =$

$2'000 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01x-1} \cdot [(1 + (x - 100) \cdot (-0{,}01)] =$

$2'000 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01x-1} \cdot [1 - 0{,}01x + 1] = 2'000 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01x-1} \cdot (2 - 0{,}01x)$

d) Zéro de f' : $2 - 0{,}01x = 0 \;\Rightarrow\; 0{,}01x = 2 \;\Rightarrow\; x = 200$.

Contrainte : $x \geq 73$.

x		200	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
Croissance de f	$\nearrow$	max	$\searrow$

Pour que le bénéfice soit maximal, il faut vendre $\boxed{200 \text{ objets}}$.

Bénéfice maximal : $f(200) = 2'000 \cdot (200 - 100) \cdot \mathrm{e}^{-2-1} + 10'000 = 2'000 \cdot 100 \cdot \mathrm{e}^{-3} + 10'000 \simeq$

$9'957{,}40 + 10'000 \simeq \boxed{19'957{,}40 \text{ CHF}}$.

2e partie

a) **Question 4** (5 points)

$k(x) = x^2 \cdot \ln(x)$.

$k(1) = 1^2 \cdot \ln(1) = 1 \cdot 0 = 0 \ \Rightarrow \ T(1\,;\,0)$.

$k'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = 2x \cdot \ln(x) + x$.

$k'(1) = 2 \cdot \ln(1) + 1 = 0 + 1 = 1 = m =$ pente de $t \ \Rightarrow \ (t) : y = x + h$.

$T(1\,;\,0) \ \Rightarrow \ 0 = 1 + h \ \Rightarrow \ h = -1 \ \Rightarrow \ \boxed{(t) : y = x - 1}$ (ou : $\boxed{x - y - 1 = 0}$)

b) **Question 5** (5 points)

a) $\lim\limits_{x \to 0_+} x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}} = 0_+ \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2}{0_+}} = 0_+ \cdot \mathrm{e}^{-\infty} = 0_+ \cdot 0_+ = 0_+$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2)}{x+1} \underset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\overset{\text{B-H}}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{2x}{x^2}}{1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0_+$.

c) **Question 6** (3 points)

$f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$.

$\ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right) = 0 \ \Rightarrow \ \dfrac{x}{x^2+1} = 1 \ \Rightarrow \ x = x^2 + 1 \Rightarrow \ x^2 - x + 1 = 0$.

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. Donc, f n'a pas de zéro.