Chapitre 1

Nombres complexes

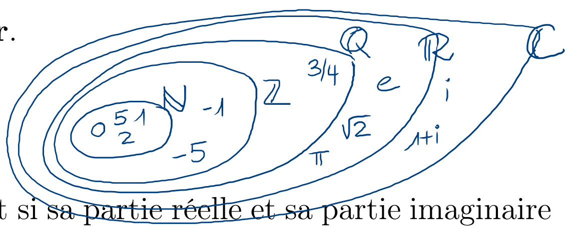
1.1 L'ensemble des nombres complexes

Définition 1.
Il existe un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes**, défini par

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$$

a est la **partie réelle** de z, notée $\mathrm{Re}(z)$.
b est la **partie imaginaire** de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.

Remarque
Si $b = 0$ alors z est un nombre réel.
Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors z est dit **imaginaire pur**.



Propriétés

a) $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$.

b) Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles : $a + bi = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

c) Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire : $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c$ et $b = d$.

Définition 2.
Le **conjugué** de $z = a + bi$ est le nombre complexe $\overline{z} = a - bi$.

Exemples

$z_1 = 3+4i$ avec $3 = \mathrm{Re}(z_1)$ et $4 = \mathrm{Im}(z_1)$

$z_2 = 5$ " $5 = \mathrm{Re}(z_2)$ et $0 = \mathrm{Im}(z_2)$ est réel et aussi complexe

$z_3 = 6i$ " $0 = \mathrm{Re}(z_3)$ et $6 = \mathrm{Im}(z_3)$

$\overline{z_1} = 3-4i$

$\overline{z_2} = 5$

$\overline{z_3} = -6i$

Opérations sur les nombres complexes

Addition

Elle est obtenue par l'addition des parties réelles entre elles, de même pour les parties imaginaires.

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

Multiplication

Pour multiplier deux nombres complexes, il suffit de respecter les règles de calculs valables pour les nombres réels et de remplacer le terme i^2 par -1.

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Exemples

a) $(-2+7i)-(2-3i)=$ $-4+10i$

b) $(4+3i)(5-2i)=$ $20-8i+15i-6i^2 = 20+7i-6(-1) = 26+7i$

c) $(3-5i)^2=$ $9-30i+25i^2 = 9-30i+25(-1) = -16-30i$

d) $(1-2i)(1+2i)=$ $1-4i^2 = 1+4 = 5$

$\Rightarrow$ $\boxed{z\cdot\bar{z}} = (a+bi)(a-bi) = a^2-b^2i^2 = \boxed{a^2+b^2}$

Inverse

On obtient l'inverse d'un nombre complexe en amplifiant la fraction par son conjugué.

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2} = \underbrace{\frac{a}{a^2+b^2}}_{Re(z)} + \underbrace{-\frac{b}{a^2+b^2}}_{Im(z)}\cdot i$$

Division

La division du nombre complexe z_1 par un nombre complexe non nul z_2 s'obtient en multipliant z_1 par l'inverse de z_2. Autrement dit en amplifiant la fraction par le conjugué de z_2.

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Exemples

a) $\dfrac{1}{-5-12i}\cdot\dfrac{-5+12i}{-5+12i} = \dfrac{-5+12i}{25+144} = \dfrac{-5+12i}{169} = -\dfrac{5}{169}+\dfrac{12}{169}i$

b) $\dfrac{15-35i}{3+4i}\cdot\dfrac{3-4i}{3-4i} = \dfrac{45-60i-105i+140i^2}{9+16} = \dfrac{-95-165i}{25} = \underbrace{-\dfrac{19}{5}}_{Re(z)} \underbrace{-\dfrac{33}{5}i}_{Im(z)}$