Représentation graphique d'un nombre complexe

Définition 3.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé on peut associer à tout nombre complexe $z = a + bi$ le point $M(a; b)$, et réciproquement, à tout point $M(a; b)$ on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$.
On peut également associer à tout nombre complexe $z = a + bi$ le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et réciproquement.
Ce plan est appelé le **plan complexe** (ou plan de Gauss ou plan d'Argand-Cauchy).

z est appelé l'**affixe** de M ou de $\overrightarrow{OM}$.

Tout point de l'axe horizontal correspond à un nombre réel car b = 0 et tout point de l'axe vertical correspond à un nombre purement imaginaire puisque a = 0. C'est pourquoi on appelle l'axe horizontal l'**axe réel** (Re) et l'axe vertical l'**axe imaginaire** (Im).

Exemples

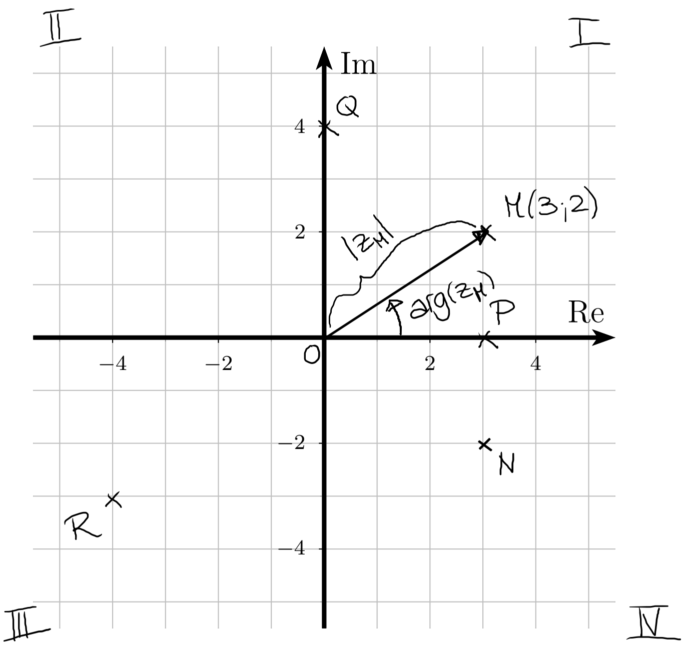
$z_M = 3+2i$

$z_N = \overline{z_M}$

$z_P = 3$

$z_Q = 4i$

$z_R = -4-3i$



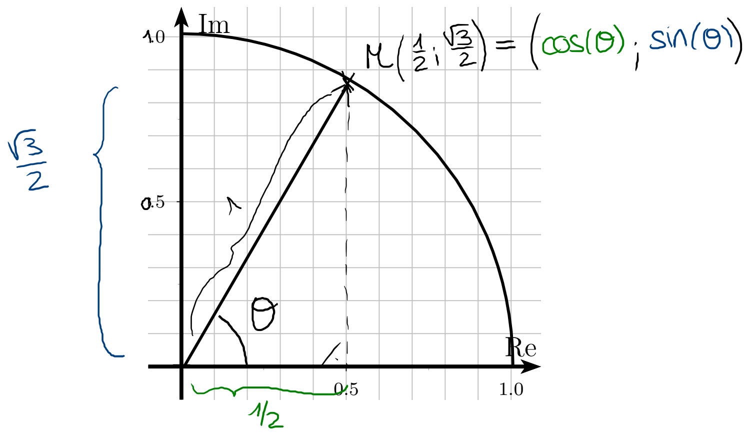
Définition 4.
L'angle orienté entre l'axe réel et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est appelé l'**argument** de z. On le note arg(z).
La norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est appelée le **module** de z. On le note $|z|$. $= \|\overrightarrow{OM}\|$

$$|z_M| = |3+2i| = \|\overrightarrow{OM}\| = \left\|\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13} \text{ (Pythagore)}$$

Si $z = a+bi$, $\boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2}}$

1.2 Nombres complexes sous forme trigonométrique

Exemple : Soit $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\qquad \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}866$



Calculer le module et l'argument de z.

$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \implies$ M est sur le cercle trigonométrique

$\tan(\theta) = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} \iff \theta = \frac{\pi}{3}$ (car quadrant I)

ou

$\left.\begin{array}{l} \cos(\theta) = \frac{1}{2} \\ \text{et} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \implies \theta = \frac{\pi}{3} \implies z = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

car $M\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) ; \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Définition 5.
On appelle **forme trigonométrique** d'un nombre complexe z l'expression :

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \text{avec } r = |z| \text{ et } \theta = \arg(z).}$$

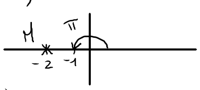
On note aussi $z = r\text{cis}(\theta)$ ou encore $z = [r;\theta]$.

Exemples

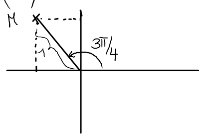
Écrire les nombres complexes ci-dessous sous forme algébrique :

a) $z = 2\text{cis}(\pi) = 2\cdot\left(\cos(\pi) + i\cdot\sin(\pi)\right) = 2\cdot(-1 + i\cdot 0) = -2$

ou graphiquement



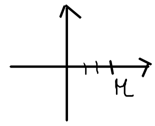
b) $z = \text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$



Écrire les nombres complexes ci-dessous sous forme trigonométrique :

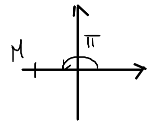
c) $z = 3$

$r = 3$ et $\theta = 0 \Rightarrow z = 3\,\text{cis}(0)$



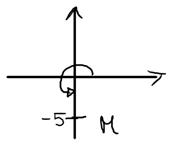
d) $z = -3$

$r = 3$ et $\theta = \pi \Rightarrow z = 3\,\text{cis}(\pi)$



e) $z = -5i$

$r = 5$ et $\theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow z = 5\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$



Relations entre formes algébrique et trigonométrique

Soit $z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\cos(\theta) + r\sin(\theta)\cdot i$

Rappel : $a+bi = c+di \Leftrightarrow a = c$ et $b = d$

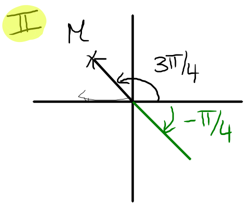
On a : $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\begin{cases} a = r\cos(\theta) \\ b = r\sin(\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{r} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{r} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \tan(\theta) = \frac{b}{a}$$

(form. CRM p. 17-18)

Exemples (suite)

f) $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$



$r = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = 2$

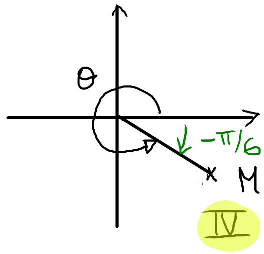
$\tan(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1 \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + k\cdot\pi$

II $\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + 1\cdot\pi = \frac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow z = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 2\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

ou $\begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \ldots \theta = \frac{3\pi}{4}$

g) $z = 2\sqrt{3} - 2i$



$|z| = r = \sqrt{4 \cdot 3 + 4} = 4$

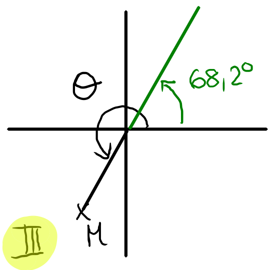
$\tan(\theta) = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$

IV
$\Rightarrow \quad -\frac{\pi}{6} + 2 \cdot \pi = -\frac{\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$\Rightarrow \quad z = 4 \operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

h) $z = -2 - 5i$



$|z| = r = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$

$\tan(\theta) = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \theta \cong 68{,}2^\circ + k \cdot 180^\circ \cong 1{,}19 + k\pi$

III
$\Rightarrow \quad \left(\theta \cong 68{,}2^\circ + 180^\circ \cong 248{,}2^\circ \quad \Rightarrow \quad z \cong \sqrt{29} \operatorname{cis}(248{,}2^\circ) \right)$

$\cong 1{,}19 + \pi = 4{,}33 \quad \Rightarrow \quad z \cong \sqrt{29} \operatorname{cis}(4{,}33)$