Produit et quotient sous forme trigonométrique

Si les nombres complexes sont exprimés sous leur forme trigonométrique, certaines opérations sont plus simples à mémoriser.

Théorème 1.

Soit $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)) = r_1 \operatorname{cis}(\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)) = r_2 \operatorname{cis}(\theta_2)$ deux nombres complexes donnés sous leur forme trigonométrique.
On a :

a) $z_1 z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$ produit des modules et somme des arg.

b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$ $(z_2 \neq 0)$. quotient " et différence des arg.

Démonstration:

a)
$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)) \cdot r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)) \\ &= r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + i\left(\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\right)\right] \\ &= r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right) \end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue en utilisant les formules trigonométriques :
$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ et
$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$

b)
$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))}{r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))} \\ &= \frac{r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))}{r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))} \cdot \frac{\cos(\theta_2) - i\sin(\theta_2)}{\cos(\theta_2) - i\sin(\theta_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + i\left(\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\right)}{(\cos^2(\theta_2) + \sin^2(\theta_2))} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)) \end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue en utilisant les formules trigonométriques :
$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$ et
$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$

CQFD

Exemple

Soit $z_1 = -4 - 4i$ et $z_2 = -2i$. Calculer $z_1 z_2$ et $\dfrac{z_1}{z_2}$ en utilisant la forme trigonométrique.

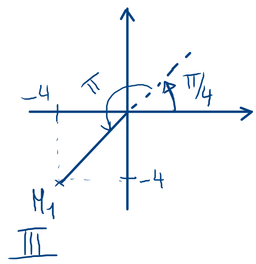
forme trigo.

1) $r_1 = |z_1| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

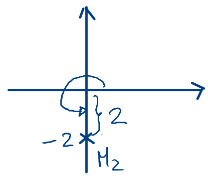
$\tan(\theta_1) = \dfrac{-4}{-4} = 1 \iff \theta_1 = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot \pi$

$\overset{\text{III}}{\Longrightarrow} \theta_1 = \dfrac{\pi}{4} + 1 \cdot \pi = \dfrac{5\pi}{4}$

$z_1 = 4\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$

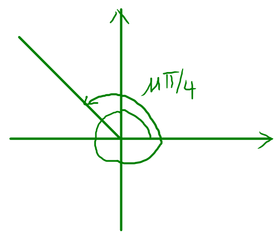


2) $r_2 = 2 \operatorname{cis}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$



$z_1 \cdot z_2 = 4\sqrt{2} \cdot 2 \operatorname{cis}\left(\dfrac{5\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{2}\right) = 8\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\dfrac{11\pi}{4}\right)$

$= 8\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$



$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis}\left(\dfrac{5\pi}{4} - \dfrac{3\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

ex 1.2.4 et 1.2.5