Formule de Moivre et racines n^e des nombres complexes

Définition 6.
Si z est un nombre complexe et n est un entier positif, alors un nombre complexe w est une **racine n^e** de z si $w^n = z$.

Nous allons prouver que tout nombre complexe non nul possède n racines n^e différentes.

Théorème 2. Formule de Moivre

Soit $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ un nombre complexe donné sous sa forme trigonométrique. On a :

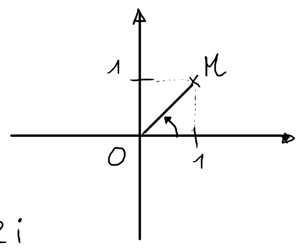
$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = r^n \text{ cis}(n\theta)$$

Cette formule découle de la formule du produit (théorème 1. a)).

Exemple
Calculer $(1+i)^{10} = \left(\sqrt{2}\cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{10}$

$= \sqrt{2}^{10} \cdot \text{cis}\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 2^5 \text{ cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right)$

$= 32 \text{ cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 32i$



Théorème 3.

Soit $z = r \text{ cis}(\theta) \in \mathbb{C}^*$ donné sous sa forme trigonométrique et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors z a exactement n racines n^e différentes $w_0, w_1, ..., w_{n-1}$ données par

$$w_k = \sqrt[n]{r} \text{ cis}\left(\frac{\theta + k\cdot 2\pi}{n}\right) \qquad k = 0, 1, ...n-1$$

$w^n = z$

Démonstration:

Soit $z = r\,\text{cis}(\theta)$

Soit $w = t\cdot\text{cis}(\alpha)$ tq $w^n = z$

$(t\cdot\text{cis}(\alpha))^n = r\cdot\text{cis}(\theta)$

$t^n\cdot\text{cis}(n\alpha) = r\cdot\text{cis}(\theta)$

2 nbres complexes égaux ont m̂ module et m̂ argument à 2π près

$\Rightarrow \begin{cases} t^n = r \\ n\alpha = \theta + k\cdot 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \dfrac{\theta + k\cdot 2\pi}{n} \end{cases}$ avec $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

($k = n$ on obtient le m̂ résultat que si $k = 0$)

$\Rightarrow \quad w_0 = \sqrt[n]{r}\text{ cis}\left(\frac{\theta}{n}\right)$

$w_1 = \sqrt[n]{r}\text{ cis}\left(\frac{\theta + 2\pi}{n}\right)$

$\vdots$

$w_{n-1} = \sqrt[n]{r}\text{ cis}\left(\frac{\theta + (n-1)\cdot 2\pi}{n}\right)$

au CQFD

Remarque
Les racines n^e de z ayant toutes le même module, sont sur un cercle de rayon $\sqrt[n]{r}$ centré en O.
Elles sont de plus équidistantes sur le cercle, car la différence des arguments est de $\frac{2\pi}{n}$.

Exemple
Calculer les racines 4^e de $z = -8 - 8\sqrt{3}i$, puis les représenter géométriquement.

ou résoudre $w^4 = -8-8\sqrt{3}\cdot i$

- form. trigo : $r = |z| = \sqrt{64+64\cdot 3} = 16$
  $\tan(\theta) = \frac{-8\sqrt{3}}{-8} = \sqrt{3} \iff \theta = \frac{\pi}{3} + k\cdot\pi \xrightarrow{\text{III}} \theta = \frac{\pi}{3}+\pi = \frac{4\pi}{3}$

$\Rightarrow z = 16 \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

- On pose $w = t\cdot\operatorname{cis}(\alpha) \Rightarrow w^4 = z \iff t^4 \operatorname{cis}(4\alpha) = 16 \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

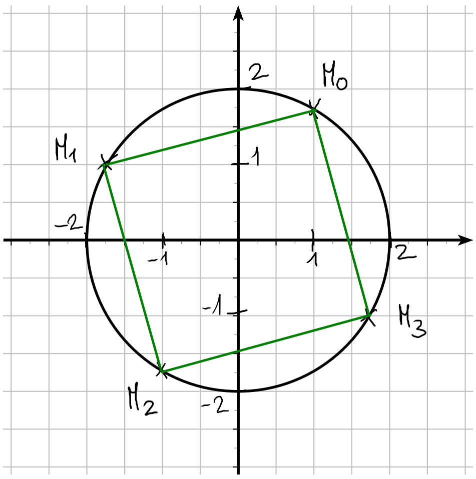
$\Rightarrow \begin{cases} t^4 = 16 \\ 4\alpha = \frac{4\pi}{3} + k\cdot 2\pi \end{cases}, k = 0,1,2,3 \iff \begin{cases} t = 2 \\ \alpha = \frac{\pi}{3} + k\cdot\frac{\pi}{2} \end{cases}, k = 0,1,2,3$

$\Rightarrow w_0 = 2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1+\sqrt{3}\,i$

$w_1 = 2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}+1\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 2\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}+i$

$w_2 = 2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}+2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 2\operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -1-\sqrt{3}\,i$

$w_3 = 2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}+3\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 2\operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3}-i$



(sommets d'un carré)

ex 1.2.8 a)
1.2.9