## Racines carrées d'un nombre complexe sous forme algébrique

On souhaite résoudre l'équation $z^2 = u$ dans $\mathbb{C}$.

**Exemple** : $z^2 = 15 + 8i$

on pose $z = a+bi$

$z^2 = 15+8i \iff (a+bi)^2 = 15+8i \iff a^2-b^2 + 2abi = 15+8i$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2 = 15 \\ 2ab = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2-b^2 = 15 \\ ab = 4 \end{cases}$

on peut isoler a ou b
et substituer dans la 1e équa.

ou on utilise une 3e équation en égalant les modules de $z^2$ et de $15+8i$

$(\sqrt{a^2+b^2})^2 = \sqrt{15^2+8^2} \iff a^2+b^2 = 17$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 17 \\ a^2-b^2 = 15 \\ ab = 4 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \iff \begin{cases} 2a^2 = 32 \\ 2b^2 = 2 \\ \underbrace{ab = 4} \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm 4 \\ b = \pm 1 \end{cases}$

signifie que
a et b sont
de m̂ signe.

$\Rightarrow z_1 = 4+i$ ou $z_2 = -4-i \Rightarrow z_{1,2} = \pm(4+i)$

$\Rightarrow S = \{\pm(4+i)\}$

**Cas général** pour résoudre $(a+bi)^2 = x+yi$

on utilise les 3 équations : $\begin{cases} a^2+b^2 = \sqrt{x^2+y^2} \\ a^2-b^2 = x \\ 2ab = y \end{cases}$

égalité des mod.
" des parties réelles
" " imagin.

**Remarque**
Un nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées