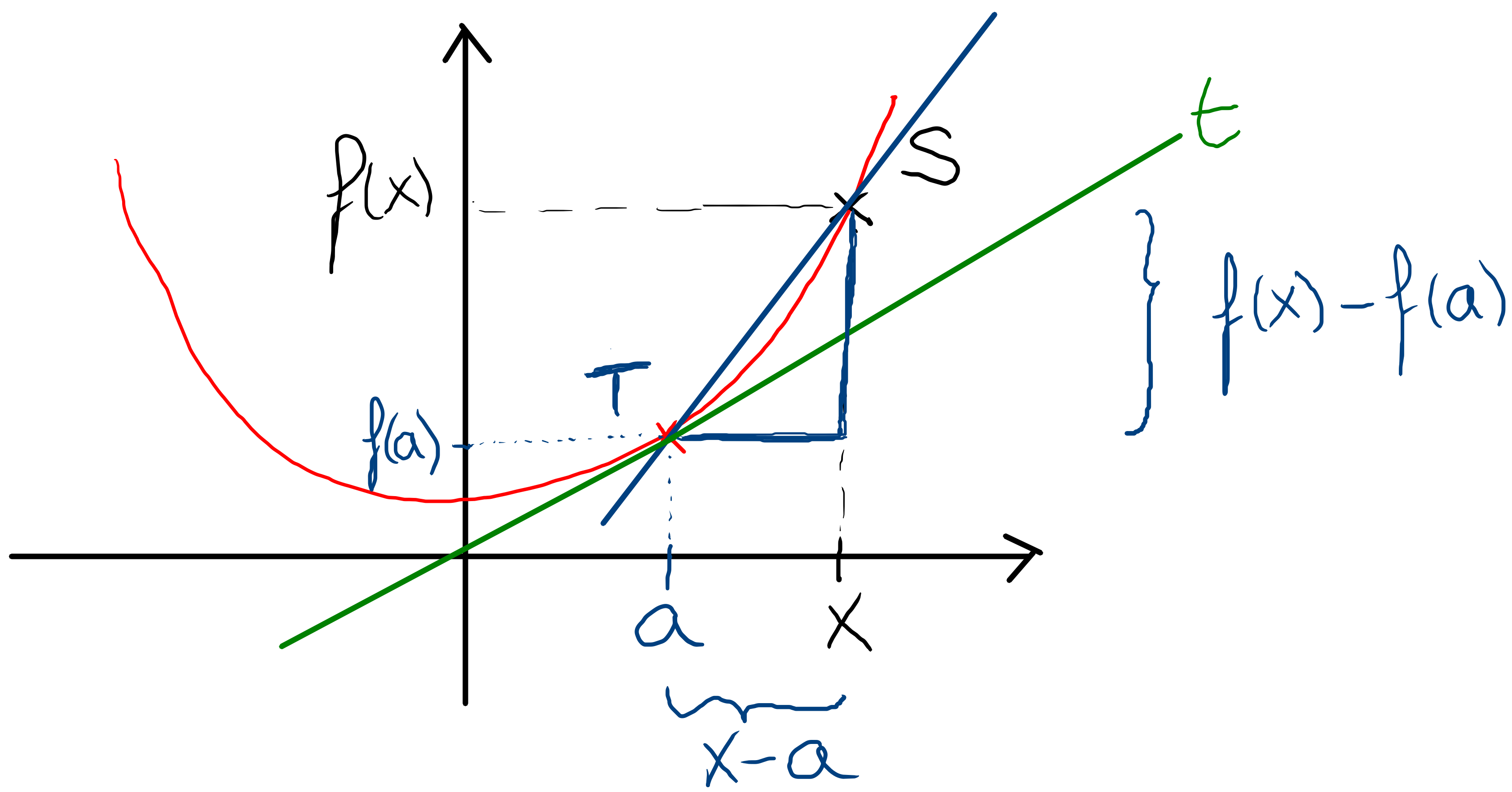
2.9 Dérivée

But : connaître la croissance d'une fonction

Idée : prendre un point $T(a; f(a))$ fixe et calculer la pente de la tangente à la courbe au point T.



Pour ce faire, prenons un point $S(x; f(x))$ (variable) sur la courbe au voisinage de T.

la pente de la droite TS est $\quad m(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

En approchant S de T, la droite TS se rapproche de t la tangente à la courbe en T.

Déf : En prenant la limite quand x tend vers a de cette pente, si elle existe, on définit le nombre dérivé de la fonction f au point d'abscisse a, noté $f'(a)$.

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

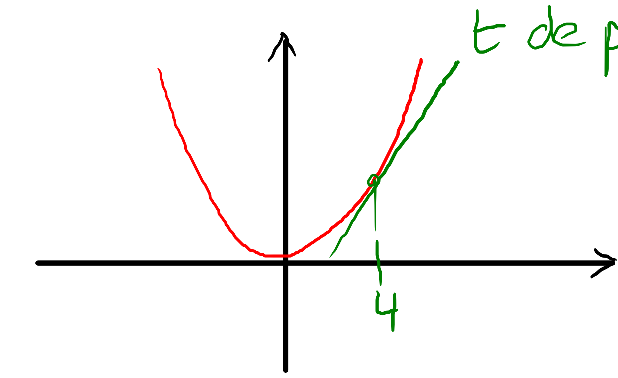
Interprétation géométrique : $f'(a)$ est la pente de la tangente à courbe $y = f(x)$ au point d'abscisse a.

Rem : en posant $x = a + h$, $h \in \mathbb{R}$ on peut définir aussi

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Exples

Calculer le nombre dérivé :



1) $f'(4)$ avec $f(x) = x^2$

$$f'(4) = \lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x-4} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x \to 4} \frac{(x+4)\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}} = 8$$

pente de t

2) $g'(-2)$ avec $g(x) = \frac{2}{x}$

$$g'(-2) = \lim_{x \to -2} \frac{g(x) - g(-2)}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{\frac{2}{x} + 1}{x+2} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x \to -2} \frac{\frac{2+x}{x}}{x+2}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{\cancel{2+x}}{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x+2}} = -\frac{1}{2}$$

Fonction dérivée

Déf : Soit f une fonction, $ED(f)$ son ensemble de définition et I un intervalle dans $ED(f)$.
Si le nombre dérivé de f existe pour tous les $x \in I$, on définit f' la fonction dérivée :

$$f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f'(x)$$

Exemples   Calculer la fonction dérivée des fonctions :

1) $f(x) = x^2$ $ED(f) = \mathbb{R}$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x \to a} \frac{(x+a)\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}} = \lim_{x \to a} (x+a) = 2a$$

$f'(x) = 2x$

2) $f(x) = \frac{1}{x}$ $ED(f) = \mathbb{R}^*$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x \to a} \frac{\overset{-\cancel{(x-a)}}{a-x}}{ax} \cdot \frac{1}{\cancel{x-a}} = \lim_{x \to a} \frac{-1}{ax} = -\frac{1}{a^2}$$

$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

3) $f(x) = \sqrt{x}$ $ED(f) = \mathbb{R}_+$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \lim_{x \to a} \frac{\overset{1}{\cancel{x-a}}}{\cancel{(x-a)}(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$