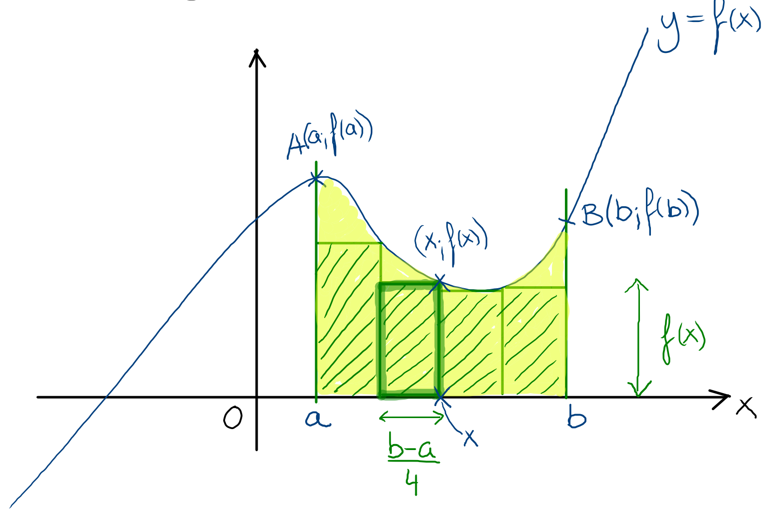
2. Intégrales définies

But : Calculer l'aire d'un domaine.



$$\mathcal{A}_{\square} = \frac{b-a}{4} \cdot f(x)$$

Idée : on découpe le domaine en n rectangles de largeur $\frac{b-a}{n}$

Plus les rectangles sont étroits plus la somme des aires des rectangles s'approche de l'aire du domaine délimité par la courbe $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites $x = a$ et $x = b$.

A la limite quand n tend vers l'infini, on obtient l'aire exacte du domaine

$$\left(\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\Delta x} = \int_a^b f(x)\, dx \right)$$

Cette limite s'appelle l'intégrale définie de a à b de la fonction f, on note :

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

b ← borne supérieure

a ← borne inférieure

Pour calculer cette intégrale on commence par calculer une primitive de f puis

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

Exemples :

1) $$\int_0^4 (x+2)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x \Big|_0^4 = \left(\frac{1}{2}\cdot 16 + 8\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 0 + 0\right)$$

$$= (8+8) - 0 = 16$$

2) $$\int_{-1}^{1} (x^2+7)^2 \cdot x \, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (x^2+7)^2\, 2x \, dx$$

$u = x^2+7$

$u' = 2x$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(x^2+7)^3 \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{6}\left[8^3 - 8^3\right] = 0$$

3) $$\int_3^4 (x^2-7x+10)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 10x \Big|_3^4$$

$$= \frac{64}{3} - 56 + 40 - \left(9 - \frac{63}{2} + 30\right)$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{15}{2} = -\frac{13}{6}$$

<u>Rem</u> : L'intégrale définie peut être positive, nulle ou négative.
On n'obtient pas directement une aire géométrique.
(On l'appelle aire algébrique)

<u>Exemples (suite)</u>

4) $$\int_{-9}^{-1} \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-9}^{-1}\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln(|x|)\Big|_{-9}^{-1}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\ln(1)}_{=0} - \frac{1}{2}\ln(9)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(9) = \ln\left(9^{-1/2}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

5) $$\int_0^1 (e^t - 2)\,dt = e^t - 2t\Big|_0^1 = e^1 - 2 - (e^0 - 0)$$

$$= e - 2 - 1 = e - 3$$