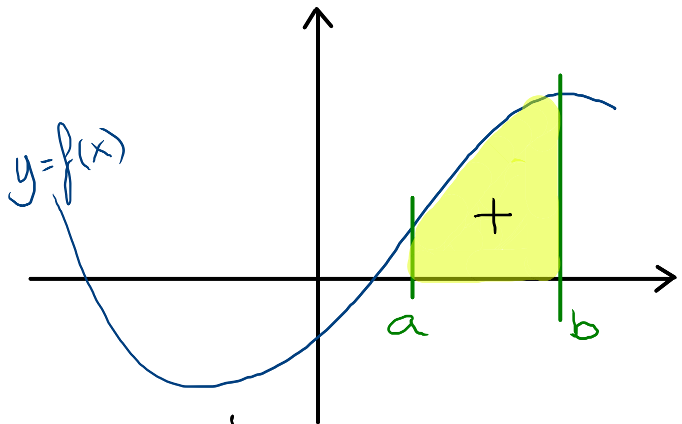
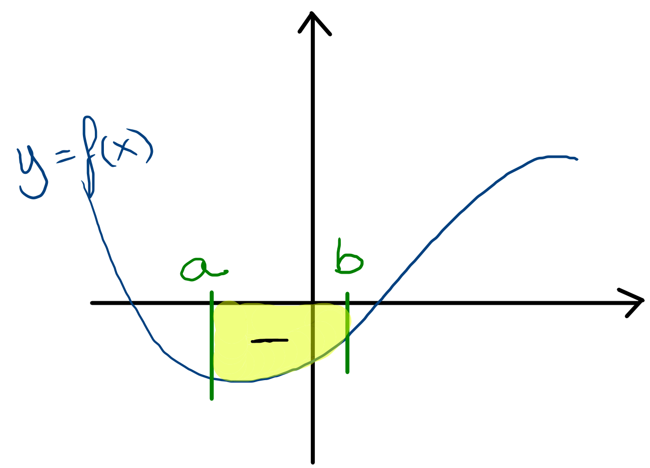
Aire géométrique

Aire "sous" une courbe



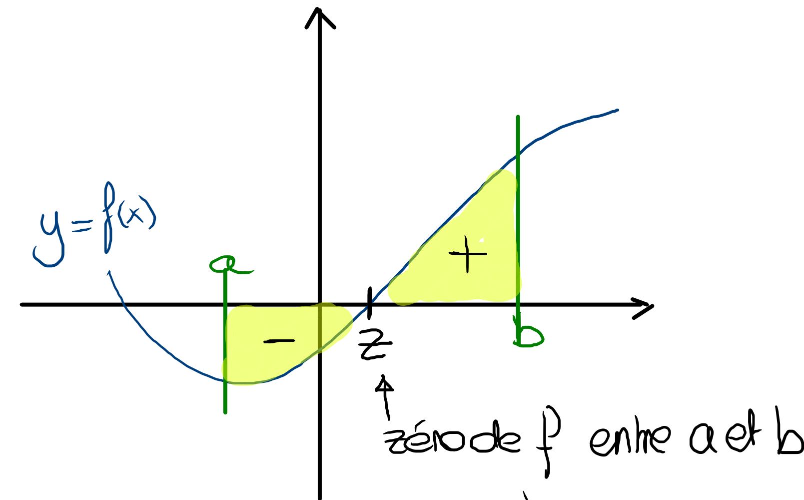
$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx$$

si $f(x) > 0$ entre a et b



$$\mathcal{A} = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|$$

si $f(x) < 0$ entre a et b



$$\mathcal{A} = \left| \int_a^z f(x)\,dx \right| + \int_z^b f(x)\,dx$$

si $f(x) < 0$ entre a et z

et $f(x) > 0$ entre z et b.

Exemples : 1) Calculer l'aire du domaine délimité par $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites $x = a$ et $x = b$

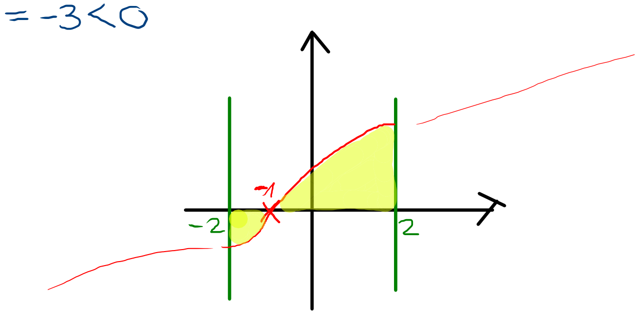
avec $f(x) = x^3 + 1$ et $a = -2$, $b = 2$

1e étape : $ED(f) = \mathbb{R}$

zéro(s) : $x^3 + 1 = 0 \iff (\underset{\downarrow\, -1}{x+1})(\underbrace{x^2 - x + 1}_{\Delta = -3 < 0}) = 0$

signe :

x		-1	
$\text{sgn}(f)$	$-$	0	$+$



2e étape : 1 primitive $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x$

3e étape : calculer les 2 intégrales définies

$$I_1 = \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + x \Big|_{-2}^{-1} = \left(\frac{1}{4} - 1\right) - (4 - 2) = -\frac{3}{4} - 2 = -\frac{11}{4}$$

$$I_2 = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + x \Big|_{-1}^{2} = (4 + 2) - \left(\frac{1}{4} - 1\right) = 6 - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{4}$$

4e étape : $A = \left|-\frac{11}{4}\right| + \frac{27}{4} = \frac{11}{4} + \frac{27}{4} = \frac{19}{2}\ u^2$ (aire géométrique)

Rem : Alors que $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + x \Big|_{-2}^{2} = (4+2) - (4-2) = 6 - 2 = 4 \neq \frac{19}{2}$

aire algébrique

2) Calculer l'aire du domaine fermé délimité par $y = f(x)$ et l'axe Ox.

$$f(x) = -x^3 + 5x^2 + 6x$$

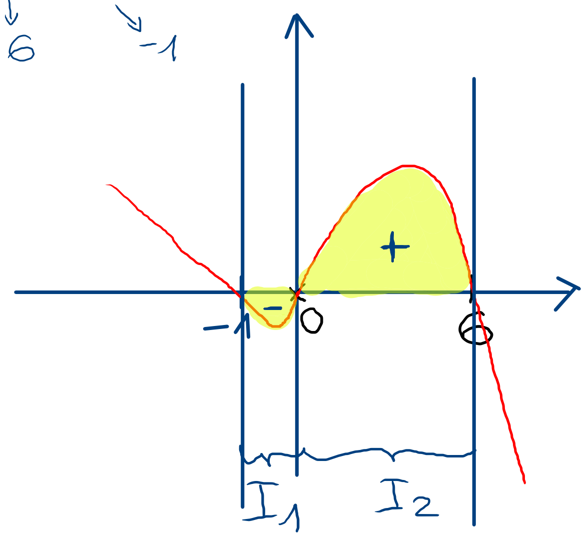
1^e étape : $ED(f) = \mathbb{R}$

zéro(s) : $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x(x^2 - 5x - 6) = -x(x-6)(x+1) = 0$

$$\underset{0}{-x}\,\underset{6}{(x-6)}\,\underset{-1}{(x+1)}$$

signe :

x		-1		0		6	
$\text{sgn}(f)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$



2^e étape : $F(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 3x^2$

3^e : $I_1 = \int_{-1}^{0} f(x)dx = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 \Big|_{-1}^{0}$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{4} - \frac{5}{3} + 3\right) = -\frac{-3 - 20 + 36}{12} = -\frac{13}{12}$$

$$I_2 = \int_0^6 f(x)dx = F(x)\Big|_0^6 = \left(-\frac{1}{4}.6^4 + \frac{5}{3}.6^3 + 3\cdot 36\right) - 0 = 144$$

4^e : $\text{Aire} = \left|-\frac{13}{12}\right| + 144 = \frac{1741}{12}\, u^2$