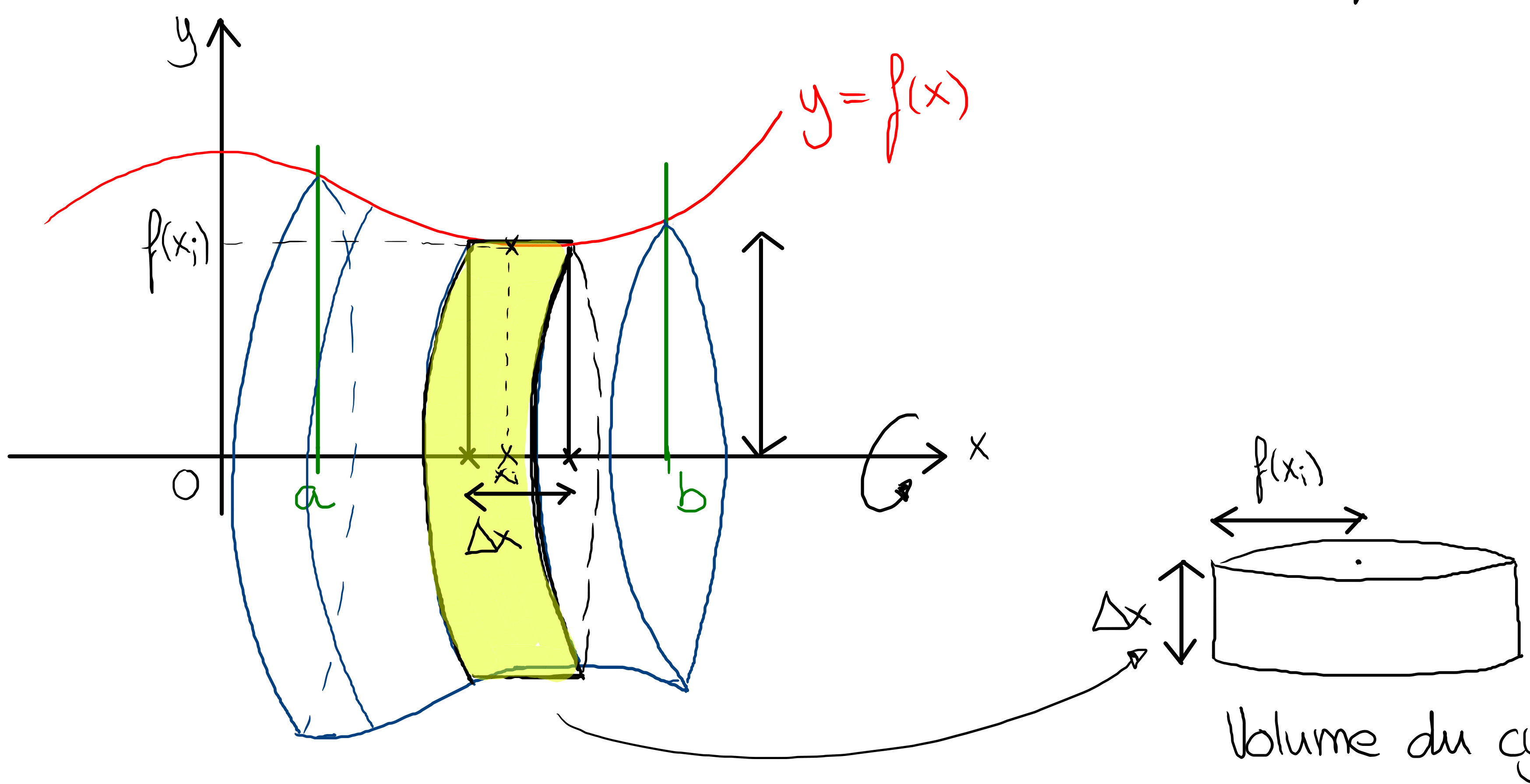
Volume

On veut calculer le volume d'un solide de révolution obtenu en faisant tourner autour de l'axe Ox un domaine fermé.



Volume du cylindre : $A_{base} \cdot hauteur$

L'idée est la même que pour le calcul d'aire :

on découpe le domaine fermé en n rectangles de même largeur : $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

et de hauteur $f(x_i)$ et on fait tourner autour de Ox.

On obtient n cylindres de volume : $V_i = \pi \cdot (f(x_i))^2 \cdot \Delta x = \pi f^2(x_i) \cdot \Delta x$

En additionnant les n volumes et en prenant $n \to \infty$

on obtient

$$\boxed{V} = \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot f^2(x_i) \cdot \Delta x \right)$$

$$= \int_a^b \pi f^2(x)\, dx \implies \boxed{\pi \int_a^b f^2(x)\, dx}$$

Exemples

1) $f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad x = 2$ et $x = 4$

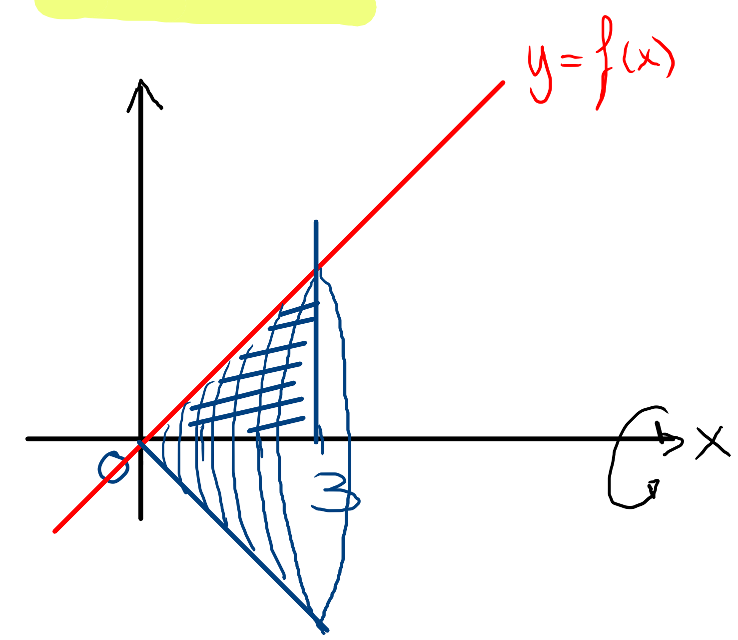
$$V = \pi \int_2^4 (\sqrt{x})^2 \, dx = \pi \int_2^4 x \, dx$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_2^4$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 16 - \frac{1}{2} \cdot 4 \right)$$

$$= \pi (8-2) = 6\pi \quad u^3$$

2) $f(x) = x$ $\qquad x = 0$ et $x = 3$



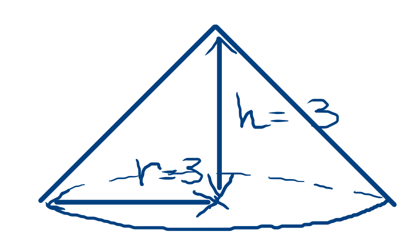
$$V = \pi \int_0^3 x^2 \, dx$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^3$$

$$= \pi \left(\frac{1}{3} \cdot 27 - \frac{1}{3} \cdot 0 \right)$$

$$= 9\pi \quad u^3$$

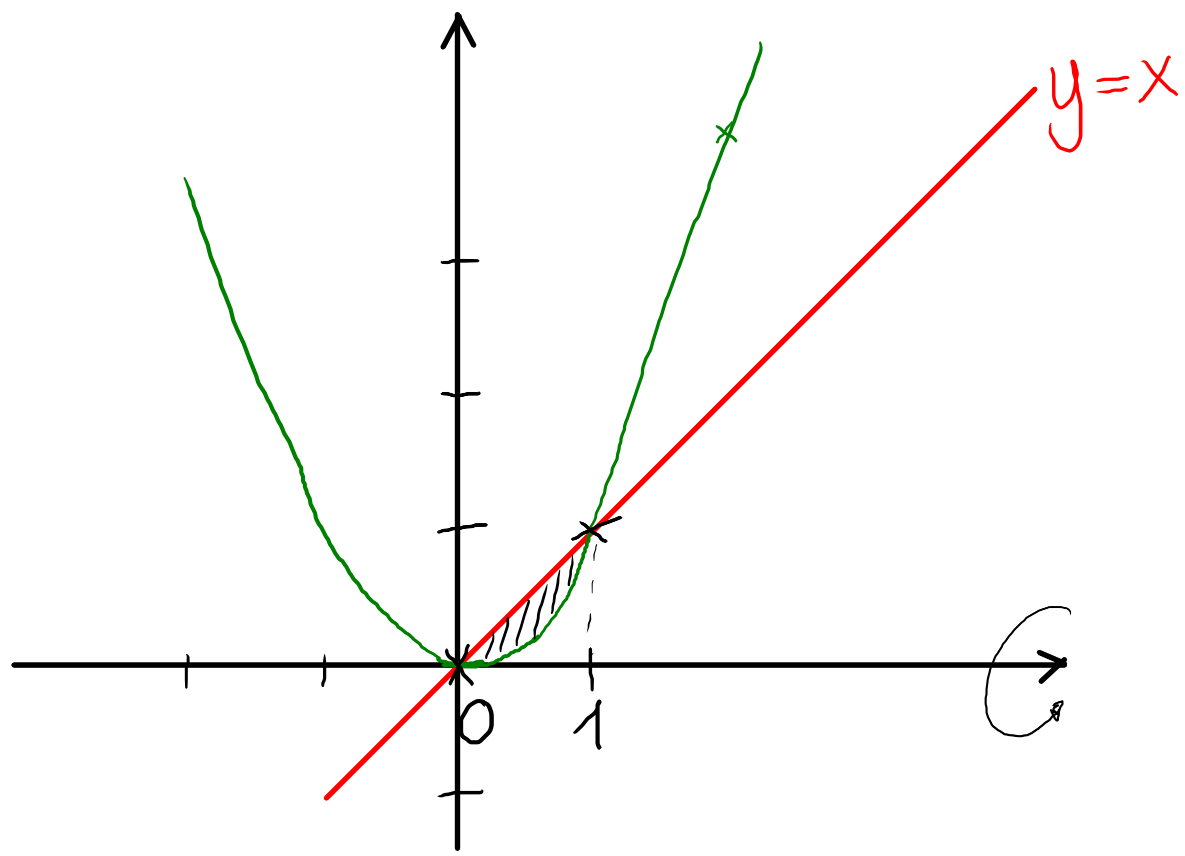
ou avec formule : $V_{\text{cône}} = \dfrac{A_{\text{base}} \cdot h}{3}$



$$= \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 3}{3} = 9\pi \quad u^3$$

ex 1.3.26 a) b) c) et 1.3.24

3) Calculer le volume engendré par la rotation autour de Ox du domaine délimité par $\underbrace{y = x}_{f(x)}$ et $\underbrace{y = x^2}_{g(x)}$



1^e : pts d' $\cap$ (pour trouver les bornes)

$$x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x-1) = 0$$

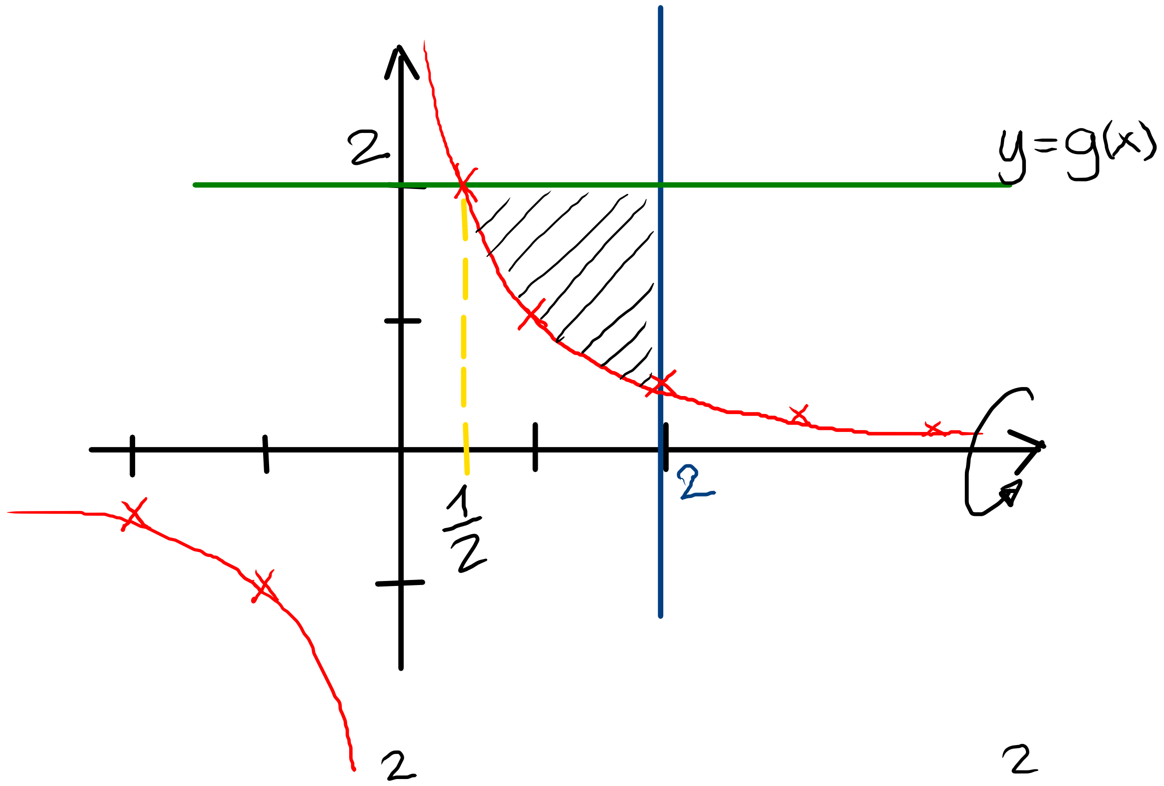
$\swarrow$ 0 $\searrow$ 1

2^e $$V_1 = \pi \int_0^1 x^2\,dx = \pi \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3}\cdot 1 - 0\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$V_2 = \pi \int_0^1 (x^2)^2\,dx = \pi \int_0^1 x^4\,dx = \pi \cdot \frac{1}{5} x^5 \Big|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{5}\cdot 1 - 0\right) = \frac{\pi}{5}$$

3^e $$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{15}\ u^3$$

4) $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=2$ et $x=2$



1e : pt d'∩

$$\frac{1}{x}=2 \iff \frac{1}{2}=x$$

2e : $V_1 = \pi\int_{1/2}^{2} 2^2\,dx = \pi\int_{1/2}^{2} 4\,dx = \pi\cdot 4x\Big|_{1/2}^{2} = \pi(8-2) = 6\pi$

$V_2 = \pi\int_{1/2}^{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi\int_{1/2}^{2}\frac{1}{x^2}\,dx = \pi\int_{1/2}^{2} x^{-2}\,dx = \pi\cdot\frac{1}{-1}x^{-1}\Big|_{1/2}^{2} = \pi\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{1/2}^{2}$

$= \pi\left(-\frac{1}{2}-(-2)\right) = \frac{3\pi}{2}$

3e : $V = V_1 - V_2 = 6\pi - \frac{3\pi}{2} = \frac{9\pi}{2}\ u^3$