Ex 1.3.1

a) $z^2 = 25 \iff z = \pm 5 \Rightarrow S = \{\pm 5\}$

b) $z^2 = -4 \iff z = \pm 2i \Rightarrow S = \{\pm 2i\}$

c) $2z^2 + 10z + 17 = 0$ $\qquad \Delta = 10^2 - 4\cdot 2\cdot 17 = -36$

$z_{1,2} = \dfrac{-10 \pm 6i}{4} = \dfrac{-5 \pm 3i}{2} \Rightarrow S = \left\{-\dfrac{5}{2} \pm \dfrac{3i}{2}\right\}$ (sol. conjuguée)

d) $z^2 + 3z - 5 = 0$ $\qquad \Delta = 9 - 4\cdot(-5) = 29$

$z_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{29}}{2} \Rightarrow S = \left\{\dfrac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}\right\}$

e) $z^2 - 3(1+i)z + 6 + 7i = 0$

$\Delta = 9(1+i)^2 - 4(6+7i) = 9(1+2i-1) - 24 - 28i = -24 - 10i$

racines de Δ : $\begin{cases} a^2+b^2 = \sqrt{24^2+10^2} = 26 \\ a^2-b^2 = -24 \\ 2ab = -10 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2a^2 = 2 \\ 2b^2 = 50 \\ ab = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 5 \\ ab = -5 \end{cases} \iff \pm(1-5i) = \pm\sqrt{\Delta}$

$\Rightarrow z_{1,2} = \dfrac{3(1+i) \pm (1-5i)}{2} = \begin{cases} \dfrac{4-2i}{2} = 2-i \\ \dfrac{2+8i}{2} = 1+4i \end{cases}$

$\Rightarrow S = \{2-i \,;\, 1+4i\}$

f) $(1+2i)z^2 - (7+4i)z + 5 - 5i = 0$

$\Delta = (7+4i)^2 - 4(1+2i)(5-5i) = 49 - 16 + 56i - 4(5+5i+10)$
$= -27 + 36i$

racines de Δ : $\begin{cases} a^2+b^2 = \sqrt{27^2+36^2} = 45 \\ a^2-b^2 = -27 \\ 2ab = 36 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2a^2 = 18 \\ 2b^2 = 72 \\ ab = 18 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm 3 \\ b = \pm 6 \\ ab = 18 \end{cases} \iff \pm\sqrt{\Delta} = \pm(3+6i)$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{7+4i \pm (3+6i)}{2(1+2i)} = \begin{cases} \frac{10+10i}{2(1+2i)} = \frac{5+5i}{1+2i}\cdot\frac{1-2i}{1-2i} = \frac{15-5i}{5} = 3-i \\ \frac{4-2i}{2(1+2i)} = \frac{2-i}{1+2i}\cdot\frac{1-2i}{1-2i} = \frac{-5i}{5} = -i \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \{3-i\,;\,-i\}$$

Ex 1.3.2

a) $z^4-1 = (z-1)(z+1)(z^2+1)$ dans $\mathbb{R}[z]$

$z^4-1 = (z-1)(z+1)(z+i)(z-i)$ dans $\mathbb{C}[z]$

$z^2+1=0 \Leftrightarrow z^2=-1 \Leftrightarrow z=\pm i$

b) z^4+1 3 méthodes différentes

1°: recherche des 4 racines 4e de -1 sous forme trigo : p.14 →

2e: " " " " algébrique ;

$$z^4=-1 \Leftrightarrow z^2=\pm i \Leftrightarrow \begin{cases} z=\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) & \text{ex 1.2.10 b)} \\ z=\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) & \text{ex 1.2.10 c)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z^4+1 = \left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

dans $\mathbb{C}[z]$

(multiplier un nbre et son conjugué pour obtenir un nbre réel : $z\cdot\bar{z}=|z|^2$)

$$z^4+1 = \left(\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right)\left(\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right) = \left(z^2-\sqrt{2}z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(z^2+\sqrt{2}z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow z^4+1 = (z^2-\sqrt{2}z+1)(z^2+\sqrt{2}z+1) \quad \text{dans } \mathbb{R}[z]$$

3e: dans $\mathbb{R}[z]$: complétion des carrés :

$$\begin{aligned} z^4+1 &= (z^4+2z^2+1)-2z^2 \\ &= (z^2+1)^2-2z^2 \\ &= (z^2+1-\sqrt{2}z)(z^2+1+\sqrt{2}z) \\ &= (z^2-\sqrt{2}z+1)(z^2+\sqrt{2}z+1) \end{aligned}$$

dans $\mathbb{C}[z]$: $\Delta_1 = 2-4=-2 \Rightarrow \pm\sqrt{\Delta_1} = \pm\sqrt{2}i$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}$$

de même $\Delta_2 = 2-4=-2 \Rightarrow \pm\sqrt{\Delta_2} = \pm\sqrt{2}i$

$$\Rightarrow z_{3,4} = \frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2} \qquad \Rightarrow z^4+1 = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4) \ldots$$

1^e : z^4+1 : $z^4=-1$

comme $-1=[1;\pi]$ $\Rightarrow$ $[r;\theta]^4=[1;\pi]$

$\Rightarrow$ $[r^4;4\theta]=[1;\pi]$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^4=1 \\ 4\theta = \pi+2k\pi \quad k=0;1;2;3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta = \frac{\pi}{4}+k.\frac{\pi}{2} \quad k=0;1;2;3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $z_1=[1;\frac{\pi}{4}]$, $z_2=[1;\frac{3\pi}{4}]$; $z_3=[1;\frac{5\pi}{4}]$; $z_4=[1;\frac{7\pi}{4}]$

$z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2=$ .... idem 2^e ou 3^e . dans $\mathbb{C}[z]$

et on termine comme dans 2^e pour facto. dans $\mathbb{R}[z]$

c) $z^3+1 = (z+1)(z^2-z+1)$ dans $\mathbb{R}[z]$.

$z^2-z+1=0$ $\quad \Delta=1-4=-3 \Rightarrow \pm\sqrt{\Delta}=\pm\sqrt{3}\,i$

$z_{1,2}=\frac{+1\pm\sqrt{3}i}{2}$ $\Rightarrow$ $z^3+1=(z+1)\left(z-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$

dans $\mathbb{C}[z]$

d) $z^6-1 = (z^3+1)(z^3-1) = (z+1)(\underbrace{z^2-z+1}_{\Delta<0})(z-1)(\underbrace{z^2+z+1}_{\Delta<0})$

dans $\mathbb{R}[z]$

Dans $\mathbb{C}[z]$: $z^2-z+1=\left(z-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$ par c)

$z^2+z+1=\left(z-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$

$\Delta=-3 \Rightarrow \pm\sqrt{\Delta}=\pm\sqrt{3}i \Rightarrow z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\Rightarrow z^6-1=(z+1)(z-1)\left(z-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)(z-\cdots)(z-\cdots)$

e) $z^3 - 6z^2 + 13z - 10$

dans $\mathbb{R}[z]$: on cherche un zéro (réel)

$z = 2$: $8 - 24 + 26 - 10 = 0$ ✓

Horner

	1	-6	13	-10
2		2	-8	10
	1	-4	5	0

$$\Rightarrow P(z) = (z-2)(\underbrace{z^2 - 4z + 5}_{\Delta = 16 - 4 \cdot 5 = -4})$$

dans $\mathbb{C}[z]$: $\pm\sqrt{\Delta} = \pm 2i \Rightarrow z_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2i}{2} = \begin{cases} 2+i \\ 2-i \end{cases}$ conjugué

$$\Rightarrow P(z) = (z-2)(z-2-i)(z-2+i)$$

f) $z^6 + 9z^4 + 27z^2 + 27$

dans $\mathbb{R}[z]$: $P(z) = (z^2+3)^3$

dans $\mathbb{C}[z]$: $z^2 = -3 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{3}i$

$$\Rightarrow z^2 + 3 = (z - \sqrt{3}i)(z + \sqrt{3}i)$$

$$\Rightarrow P(z) = (z - \sqrt{3}i)^3 (z - \sqrt{3}i)^3$$

EX 1.3.5

$$3z^3 + 2z^2 + 7z - 20 = 0$$

a) $u = -1 + 2i \in S$ car

$$3(-1+2i)^3 + 2(-1+2i)^2 + 7(-1+2i) - 20 =$$

$$3(\underbrace{-1+6i+12-8i}_{11-2i}) + 2(\underbrace{1-4i-4}_{-3-4i}) - 7 + 14i - 20 =$$

$$33 - 6i - 6 - 8i - 7 + 14i - 20 = 0 \checkmark$$

b) si $u = -1+2i$ est un zéro alors son conjugué aussi (car les coefficients sont réels) : $\bar{u} = -1-2i$

$$\Rightarrow \quad P(z) = \underbrace{\overset{(z-(-1+2i))\,(z-(-1-2i))}{(z+1-2i)(z+1+2i)}}_{(z+1)^2+4 \;=\; z^2+2z+5} Q(z)$$

$$\begin{array}{rrr|l} 3z^3 & +2z^2 & +7z-20 & z^2+2z+5 \\ \hline -3z^3 & -6z^2 & -15z & 3z-4 \\ \hline & -4z^2 & -8z-20 & \\ & 4z^2 & +8z+20 & \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

par division euclidienne ou par tâtonnement vu qu'il ne reste qu'un facteur à trouver, en comparant les termes de plus haut degré et les termes constants.

$\Rightarrow P(z) = (z+1-2i)(z+1+2i)(3z-4)$ dans $\mathbb{C}[z]$

$\Rightarrow$ Les solutions de l'équation sont :

$$S = \left\{ -1+2i \,;\, -1-2i \,;\, \frac{4}{3} \right\}$$

conjugué 1 réel.

c) dans $\mathbb{R}[z]$: $P(z) = (z^2+2z+5)(3z-4)$

<u>ou</u> b) si $u = -1+2i$ est un zéro :

Horner:

	3	2	7	−20
$-1+2i$		$-3+6i$	$-11-8i$	20
	3	$-1+6i$	$-4-8i$	0

$(-1+2i)(-1+6i) = \dots = -11-8$
$(-1+2i)(-11-8i) = \dots = 20$

$\Rightarrow P(z) = (z+1-2i)(3z^2 + (-1+6i)z + (-4-8i))$

comme u est un zéro, $\bar{u} = -1-2i$ aussi

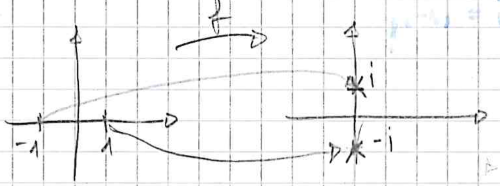
Horner:

	3	$-1+6i$	$-4-8i$
$-1-2i$		$-3-6i$	$4+8i$
	3	-4	0

$\Rightarrow$ fin idem

Ex 1.3.6

$f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ $\qquad ED(f) = \mathbb{C} - \{-i\}$



exemple:

$f(1) = \dfrac{1-i}{1+i} \cdot \dfrac{1-i}{1-i}$

$= \dfrac{1-2i-1}{1+1} = -i$

a) $f(z) = i \iff \dfrac{z-i}{z+i} = i \qquad \Big| \cdot (z+i)$

$z - i = i(z+i)$

$z - i = iz + i^2$

$z - iz = -1 + i$

$z(1-i) = -1+i$

$z = \dfrac{-1+i}{1-i} = \dfrac{-\cancel{(1-i)}}{\cancel{1-i}} = -1$

b) $f(z) = z \iff \dfrac{z-i}{z+i} = z \qquad \Big| \cdot (z+i)$

$z - i = z(z+i)$

$z - i = z^2 + zi$

$0 = z^2 + zi - z + i$

$z^2 + (-1+i)z + i = 0$

$\Delta = (-1+i)^2 - 4i = 1 - 2i - 1 - 4i = -6i$

racines de Δ : $\begin{cases} a^2 + b^2 = \sqrt{0+36} = 6 \\ a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = -6 \end{cases}$ $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$

$\iff \begin{cases} 2a^2 = 6 \\ 2b^2 = 6 \\ ab = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 3 \\ b^2 = 3 \\ ab = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm\sqrt{3} \\ b = \mp\sqrt{3} \end{cases}$

$\Rightarrow \pm\sqrt{\Delta} = \pm(\sqrt{3} - \sqrt{3}i)$

$\Rightarrow z_{1,2} = \dfrac{1-i \pm (\sqrt{3}-\sqrt{3}i)}{2} = \begin{cases} \dfrac{(1+\sqrt{3}) - (1+\sqrt{3})i}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1-i) \\ \dfrac{(1-\sqrt{3}) - (1-\sqrt{3})i}{2} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}(1-i) \end{cases}$