Révision d'analyse II - Problèmes d'examens

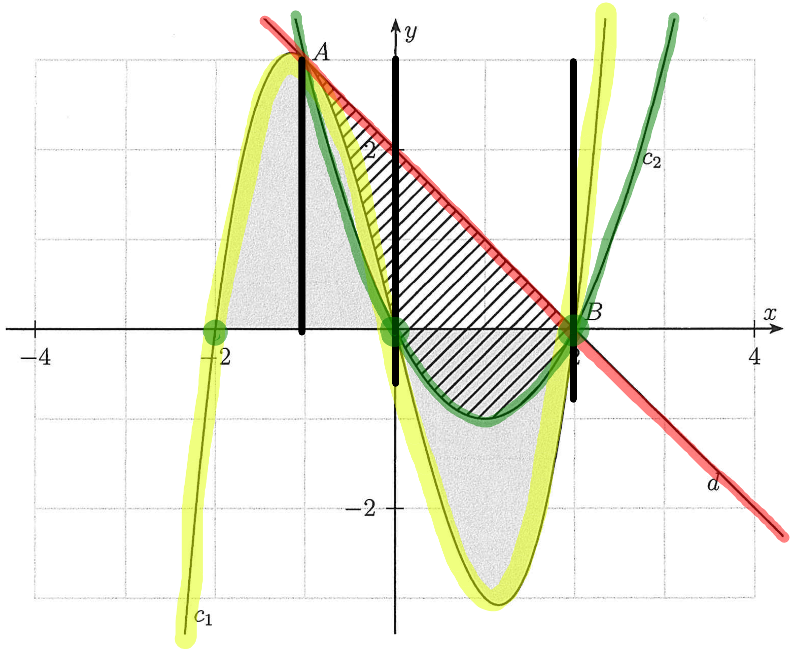
Juin, 2011

On considère les courbes c_1 et c_2 qui passent par l'origine :

$$(c_1): \ y = x^3 - 4x \qquad \text{et} \qquad (c_2): \ y = x^2 - 2x$$

et une droite d d'équation :

$$(d): \ y = -x + 2$$



a) Vérifier par calculs que les points $A(-1;3)$ et $B(2;0)$ sont des points communs à d, c_1 et c_2.

b) Calculer la valeur exacte de l'aire géométrique du domaine hachuré D_1 délimité par la droite d et les courbes c_1 et c_2.

c) On désigne par D_2 le domaine grisé compris entre l'axe Ox et la courbe c_1.

Calculer la valeur exacte du volume du solide de révolution obtenu en faisant tourner le domaine D_2 autour de l'axe Ox.

a) $(c_1): \ y = x^3 - 4x$ et $(c_2): \ y = x^2 - 2x$

quation :

$(d): \ y = -x + 2$

$A(-1;3) \in c_1 \ : \ (-1)^3 - 4(-1) = -1 + 4 = 3$ ✓

⋮

b) entre −1 et 0 sous d et au-dessus de c_1

entre 0 et 2 sous d et au-dessus de c_2

$$A_1 = \int_{-1}^{0} \left[(-x+2) - (x^3 - 4x)\right] dx = \ldots = \frac{3}{4}$$

$+$

$$A_2 = \int_{0}^{2} \left[(-x+2) - (x^2 - 2x)\right] dx = \ldots = \frac{10}{3}$$

$$A = \frac{49}{12} u^2$$

c) $y = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x+2)(x-2)$

$0 \quad -2 \quad 2$

$$V_1 = \pi \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)^2 \, dx$$

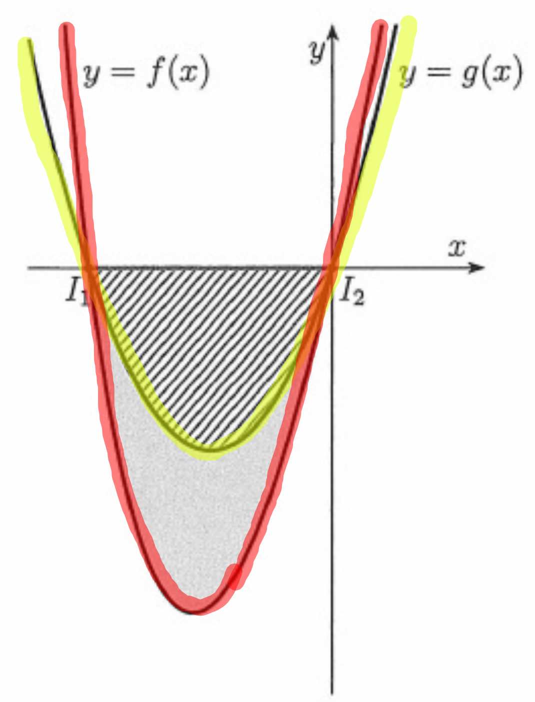
$$V_2 = \pi \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)^2 \, dx$$

$$V = \frac{2048\pi}{105} u^3$$

Juin 2013

$$f(x) = 4x \cdot \ln(x+3) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x$$

dont les graphes sont représentés ci-après.



a) cond : $x + 3 > 0$

$x > -3$

$\Rightarrow ED(f) =]-3 ; +\infty[$

zéro : $4x \cdot \ln(x+3) = 0$

0 ; $\ln(x+3) = 0$

$x + 3 = 1$

$x = -2$

b) $ED(g) = \mathbb{R}$ (aucune cond.)

zéro : $\frac{3}{2}x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0$

$\Leftrightarrow 3x(x+2) = 0$

0 ; -2

$\Rightarrow I_1(-2;0)$ et $I_2(0;0)$ car $\hat{m}$ zéros

c) $F(x) = 2(x^2-9)\cdot\ln(x+3) - x^2 + 6x$ est une primitive de $f(x) = 4x \ln(x+3)$

A vérifier : $F(x)' = f(x)$

$u = x^2 - 9$ $\quad v = \ln(x+3)$

$u' = 2x$ $\quad v' = \frac{1}{x+3}$

$$\Rightarrow F(x)' = 2\Big[\underbrace{2x \cdot \ln(x+3)}_{u' \cdot v} + \underbrace{\overset{(x+3)(x-3)}{(x^2-9)} \cdot \frac{1}{x+3}}_{u \cdot v'}\Big] - 2x + 6$$

$$= 2\big(2x \ln(x+3) + (x-3)\big) - 2x + 6$$

$$= 4x \ln(x+3) + 2x - 6 - 2x + 6 = f(x) \quad \#$$

d) $A = A_1 - A_2$

$$A_1 = \int_{-2}^{0} g(x)\,dx = \int_{-2}^{0} \left(\tfrac{3}{2}x^2 + 3x\right) dx = \left. \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 \right|_{-2}^{0} = 0 - \left(\tfrac{1}{2}\cdot(-8) + \tfrac{3}{2}\cdot 4\right)$$

$$= +4 - 6 = -2$$

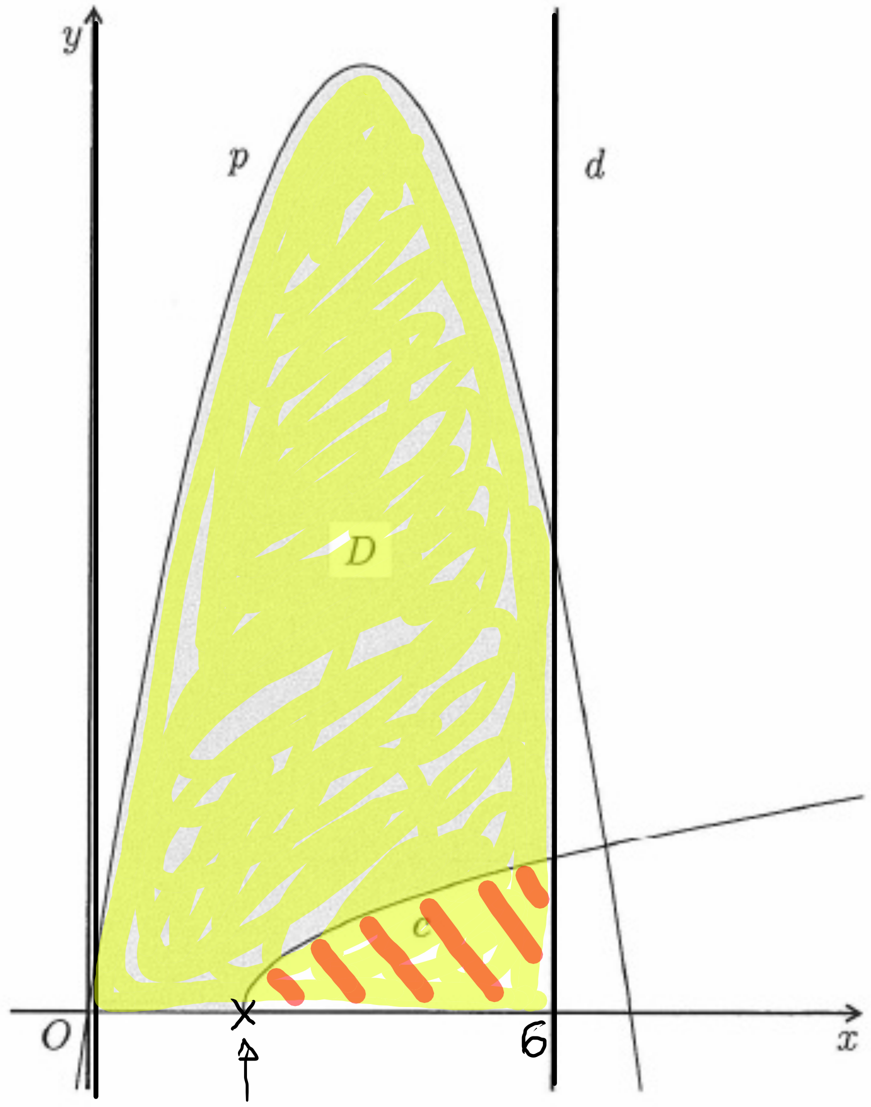
$$A_2 = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \left. \underbrace{2(x^2-9)\ln(x+3) - x^2 + 6x}_{F(x)\ (c))} \right|_{-2}^{0}$$

$$= 2(-9)\ln(3) + 0 - \left(2\cdot(-5)\underbrace{\ln(1)}_{=0} - 4 - 12\right)$$

$$= -18\ln(3) + 16$$

$$\Rightarrow A = -2 - (-18\ln(3) + 16) = \underline{18\ln(3) - 18 \quad u^2}$$

Juin 2016



$p: \; y = -x^2 + 7x$
$c: \; y = \sqrt{x-2}$
$d: \; x = 6.$

a) découpage :

$$A_1 = \int_0^6 (-x^2+7x)\,dx$$

$$A_2 = \int_2^6 \sqrt{x-2}\,dx$$

$$A = A_1 - A_2$$

zéro de c : $\sqrt{x-2} = 0$
$x-2 = 0$
$x = 2$

$$A_1 = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 \Big|_0^6 = -\frac{1}{3}\cdot 6^3 + \frac{7}{2}\cdot 6^2 - 0 = -\frac{216}{3} + 126$$
$$= -72 + 126$$
$$= 54$$

$$A_2 = \int_2^6 (x-2)^{1/2}\,dx = \frac{1}{\frac{3}{2}}(x-2)^{3/2}\Big|_2^6 = \frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^3}\Big|_2^6$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{4^3} - \frac{2}{3}\sqrt{0} = \frac{2}{3}\cdot 8 = \frac{16}{3}$$

$$\Rightarrow \quad A = A_1 - A_2 = 54 - \frac{16}{3} = \frac{146}{3}\ u^2$$

b) $$V_1 = \pi\int_0^6 (-x^2+7x)^2 dx = \pi\int_0^6 \left(x^4 - 14x^3 + 49x^2\right) dx = \pi\left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{7}{2}x^4 + \frac{49}{3}x^3\right)\Bigg|_0^6$$

$$= \pi\left[\frac{1}{5}\cdot 6^5 - \frac{7}{2}\cdot 6^4 + \frac{49}{3}\cdot 6^3 - 0\right] = \pi\left(\frac{7776}{5} - 4536 + 3528\right) = \frac{2736}{5}\pi$$

$$V_2 = \pi\int_2^6 \left(\sqrt{x-2}\right)^2 dx = \pi\int_2^6 (x-2)\,dx = \pi\cdot\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Bigg|_2^6 = \pi\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 36 - 12\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 4 - 4\right)\right]$$

$$= \pi\left(6+2\right) = 8\pi$$

$$V = V_1 - V_2 = \left(\frac{2736}{5} - 8\right)\pi = \frac{2696}{5}\pi \ u^3$$