1.3 Propriétés algébriques des nombres complexes

Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

On utilise les mêmes principes d'équivalence que dans $\mathbb{R}$.

Degré 1
On isole z dans un membre de l'équation (cf. ex. 1.1.3)

Degré 2
Pour résoudre une équation du type $az^2 + bz + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$, on commence par calculer $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta \neq 0$ l'équation possède deux solutions distinctes : $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Si $\Delta = 0$ l'équation possède deux solutions identiques (double) : $z_1 = z_2 = \dfrac{-b}{2a}$

Exemples

a) $z^2 - 2z + 5 = 0$ $\quad \Delta = 4 - 20 = -16 \neq 0$

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i \Rightarrow S = \{1 \pm 2i\}$$

b) $z^2 - (2+3i)z + i - 5 = 0$

$$\Delta = (2+3i)^2 - 4\cdot(i-5) = 4 + 12i - 9 - 4i + 20 = 15 + 8i$$

$$\pm\sqrt{\Delta} \overset{\text{exple}}{\underset{\text{p. M}}{=}} \pm(4+i)$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{2+3i \pm (4+i)}{2} = \begin{cases} 3+2i \\ -1+i \end{cases} \Rightarrow S = \{3+2i\,;\,-1+i\}$$

Théorème fondamental de l'algèbre

Théorème 4. (Théorème fondamental de l'algèbre, Karl Friedrich Gauss, 1777-1855))

Tout polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et à coefficients complexes se décompose en un produit de n polynômes du premier degré à coefficients complexes.

Sans démonstration

Corollaire

Toute équation polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et à coefficients complexes admet n solutions distinctes ou non dans $\mathbb{C}$. La somme de leur multiplicité est égale à n.

Exemples

Factoriser les polynômes suivants.

a) $z^2 - 2z + 5 = (z-(1+2i))(z-(1-2i)) = (z-1-2i)(z-1+2i)$ dans $\mathbb{C}$

zéros : $1+2i$ et $1-2i$ (p. 12) (pas factorisable dans $\mathbb{R}$ car $\Delta < 0$)

b) $z^2 - (2+3i)z + i - 5 = (z-3-2i)(z+1-i)$ dans $\mathbb{C}$

zéros : $3+2i$ et $-1+i$ (p. 12)

Conséquences pour les polynômes à coefficients réels

Soit $p(x)$ un polynôme à coefficients réels.

1. Si le nombre complexe z est un zéro du polynôme $p(x)$, son conjugué $\overline{z}$ est également zéro de ce même polynôme.
2. Tout polynôme $p(x)$ se décompose en un produit de polynômes du premier degré et du deuxième degré irréductibles (à discriminant négatif).
3. Tout polynôme $p(x)$ de degré impair possède un zéro réel.

Exemples

a) Vérifier que $z = 1 + i$ est un zéro de $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 2$ puis en déduire une factorisation dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} p(1+i) &= 2(1+i)^3 - 5(1+i)^2 + 6(1+i) - 2 \\ &= 2(1+3i+\underbrace{3i^2}_{-3}+\underbrace{i^3}_{-i}) - 5(1+2i+\underbrace{i^2}_{-1}) + 6 + 6i - 2 \\ &= 2+6i-6-2i-10i+6+6i-2 = 0 \checkmark \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $1+i$ est un zéro

cons. $\overset{1.}{\Rightarrow}$ $1-i$ est un zéro (conjugué de z)

(Cons. 3.) comme p(x) a des coefficients réels et est de degré 3, il possède un zéro réel

$$\Rightarrow \quad p(x) = \underbrace{(x-1-i)(x-1+i)}_{\substack{(x-1)^2 - i^2 \\ = x^2-2x+1+1 \\ = x^2-2x+2}}(2x-1) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 2 \quad \text{dans } \mathbb{C}$$

le zéro réel est $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad p(x) = \underbrace{(x^2-2x+2)}_{\Delta = -4 < 0}(2x-1) \quad \text{dans } \mathbb{R}$$

b) Factoriser le polynôme $q(x) = x^4 + 64$ dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$.

zéros de q : $x^4 + 64 = 0 \Leftrightarrow x^4 = -64 \Leftrightarrow x^2 = \pm 8i$

racines carrées de $8i$: $\begin{cases} a^2+b^2 = 8 \\ a^2-b^2 = 0 \\ 2ab = 8 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 8 \\ 2b^2 = 8 \\ ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 2 \\ b = \pm 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm(2+2i)$$

racines carrées de $-8i$: $\left(\begin{cases} a^2+b^2 = 8 \\ a^2-b^2 = 0 \\ 2ab = -8 \end{cases} \quad \ldots \quad \begin{cases} a = \pm 2 \\ b = \mp 2 \end{cases} \right) \Rightarrow x_{3,4} = \pm(2-2i)$

conjugués de x_1 et x_2

$$q(x) = (x-2-2i)(x+2+2i)(x-2+2i)(x+2-2i) \quad \text{dans } \mathbb{C}$$

$(x-2)^2 - (2i)^2$
$= x^2 - 4x + 4 + 4$
$= x^2 - 4x + 8$

$(x+2)^2 - (2i)^2$
$= x^2 + 4x + 4 + 4$
$= x^2 + 4x + 8$

$$q(x) = (x^2-4x+8)(x^2+4x+8) \quad \text{dans } \mathbb{R}$$

On aurait aussi pu factoriser dans $\mathbb{R}$ en utilisant la méthode de complétion:

$$q(x) = x^4 + 16x^2 + 64 - 16x^2 = \underbrace{(x^2+8)^2}_{A^2} - \underbrace{16x^2}_{B^2}$$

$$= \underbrace{(x^2+8-4x)}_{(A-B)}\underbrace{(x^2+8+4x)}_{(A+B)}$$