2.10 Applications

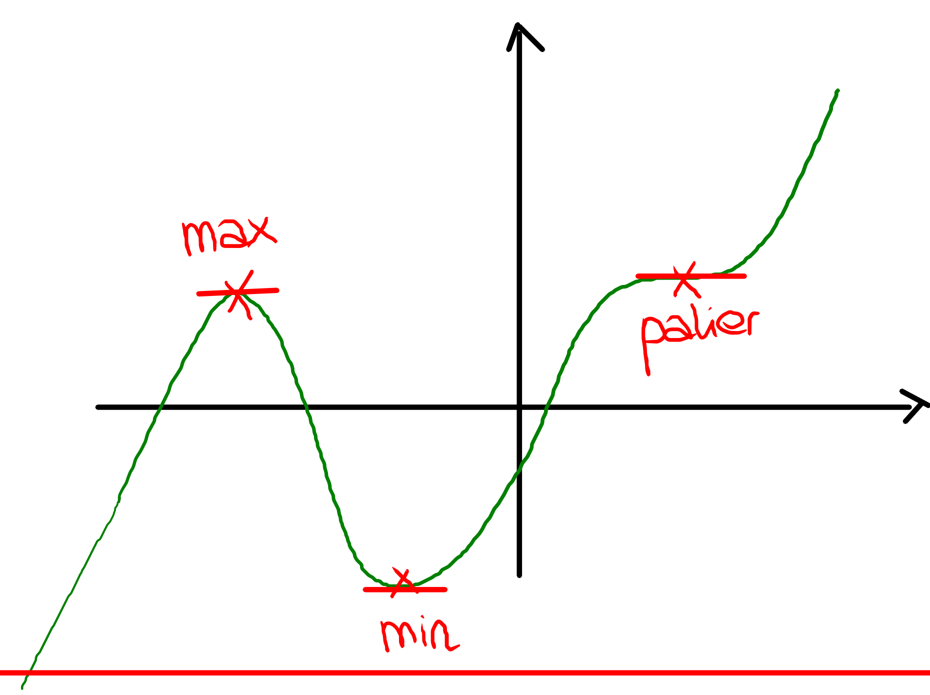
1. Croissance

Rappel : $f'(a)$ pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $T(a; f(a))$

On en déduit :

$f'(x) \geq 0$ sur un intervalle $\Leftrightarrow$ f est croissante sur cet intervalle
$f'(x) \leq 0$ " " $\Leftrightarrow$ " " décroissante " "

En particulier si $f'(a) = 0$ $\Leftrightarrow$ $(a; f(a))$ est un extremum : max ou min
ou un point d'inflexion à tangente horizontale : palier



Ainsi $\boxed{\text{étudier la croissance d'une fonction revient à étudier le signe de sa dérivée.}}$

Exemples

1) $f(x) = (x^2 + 4x - 5)^3$ $\qquad$ $ED(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 6(x-1)^2(x+5)^2(x+2)$ $\qquad$ (ex révision 1 g))

$\downarrow$ 1 (2) $\qquad$ $\downarrow$ −5 (2) $\qquad$ $\downarrow$ −2

x		$-5_{(2)}$		-2		$1_{(2)}$	
sgn(f')	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
crssce(f)	$\searrow$	palier$_1$	$\searrow$	min	$\nearrow$	palier$_2$	$\nearrow$

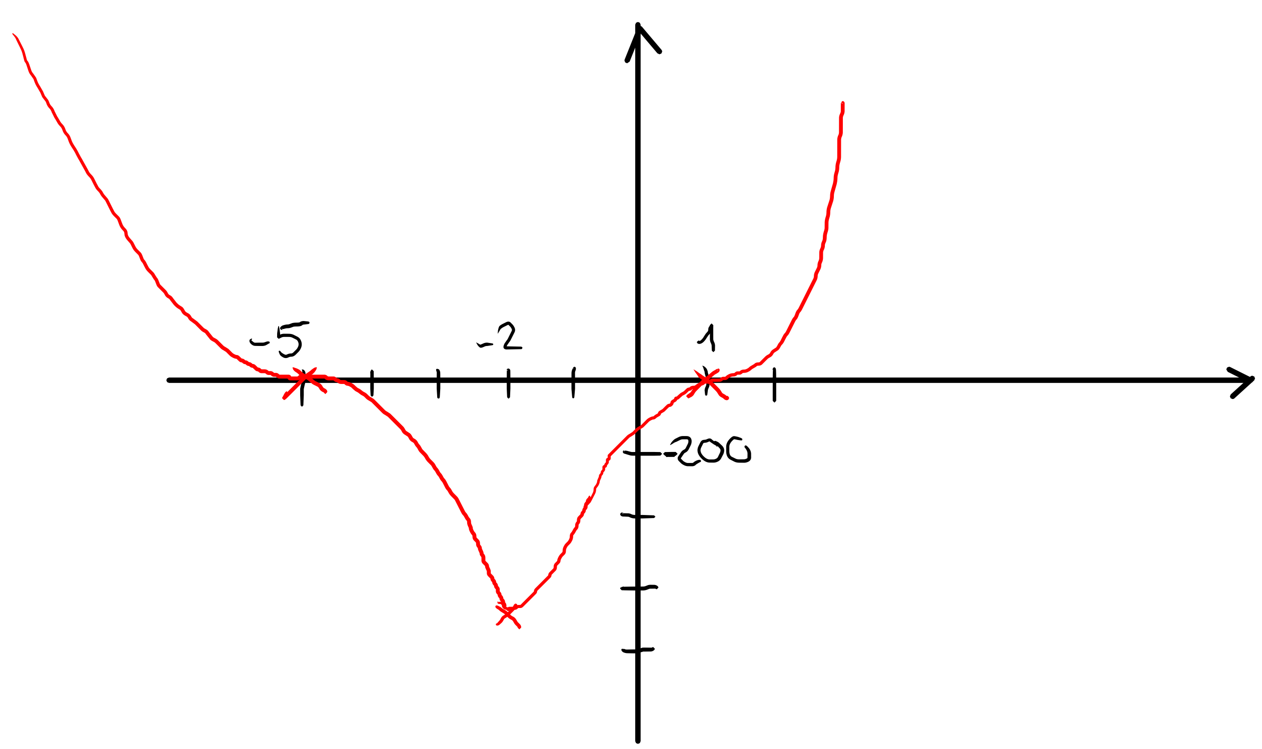
palier$_1$ $(-5\,;\, f(-5)) = (-5\,;\,0)$

min $(-2\,;\, f(-2)) = (-2\,;\,-729)$

$\downarrow$

$(4-8-5)^3$

palier$_2$ $(1\,;\, f(1)) = (1\,;\,0)$



2) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-3}$ $\qquad$ $ED(f) = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{3}\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-3) - 2x^4}{(x^2-3)^2} = \frac{x^2(3x^2-9-2x^2)}{(x^2-3)^2} = \frac{x^2(x^2-9)}{(x^2-3)^2} = \frac{x^2(x-3)(x+3)}{(x^2-3)^2}$$

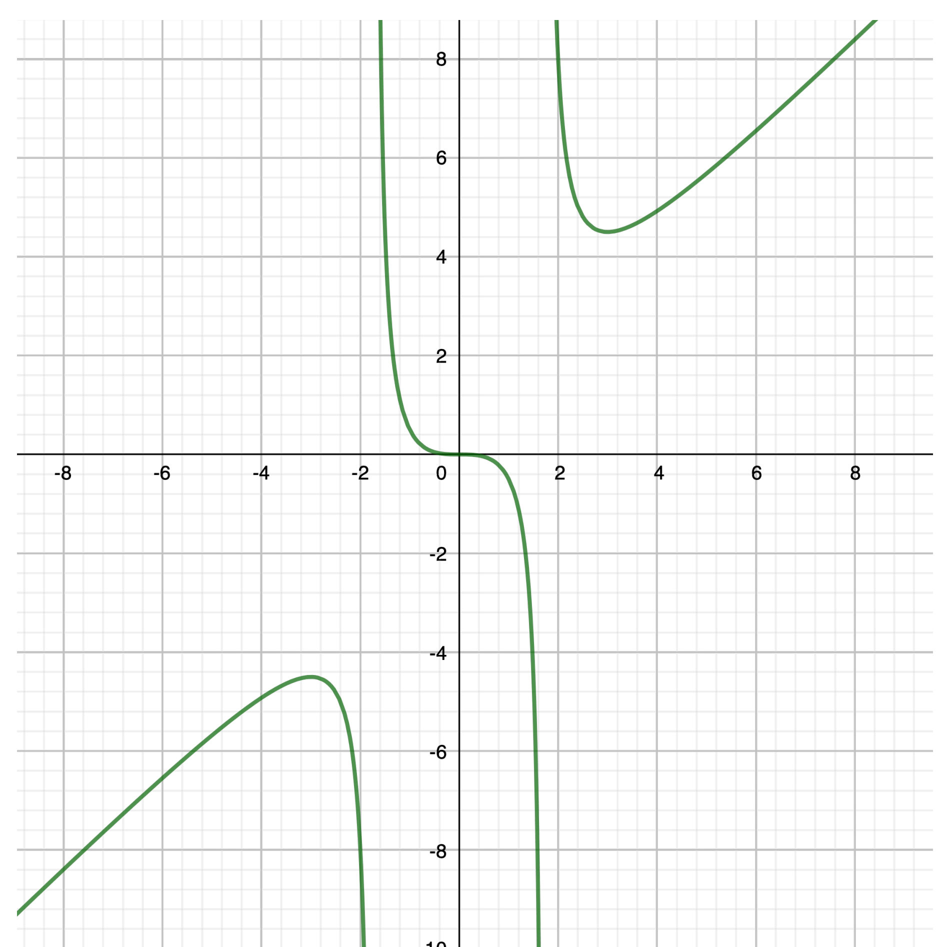
zéros : $0\ (2)$, ± 3 $\qquad$ v.i. $\pm\sqrt{3}\ (2)$

x		-3		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		3	
sgn(f')	$+$	0	$-$	$\Vert$ (2)	$-$	0 (2)	$-$	$\Vert$ (2)	$-$	0	$+$
crssce(f)	$\nearrow$	Max	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	palier	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$\text{Max}(-3\,;f(-3)) = (-3\,;-\frac{9}{2})$ $\qquad$ Rem : f est impaire : $f(-x) = -f(x)$

$\text{palier}(0\,;0)$ $\quad f(0)=0$

$\text{min}(3\,;f(3)) = (3\,;\frac{9}{2})$



ex 2.10.2 c) e)

2.10.3

2.10.6