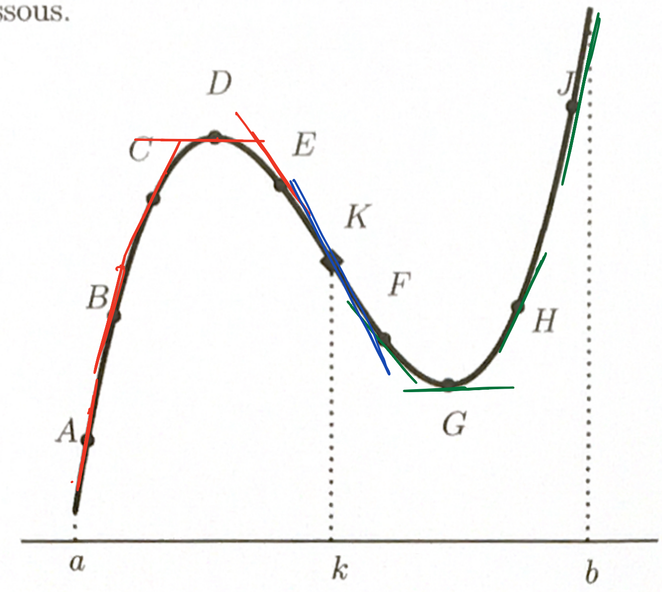
Courbure et point d'inflexion

Soit f la fonction donnée par le graphe ci-dessous.



On constate intuitivement que

- La dérivée f' de f est décroissante sur l'intervalle $[a;k]$ (les pentes des tangentes à la courbe décroissent sur $[a;k]$). La courbe est dite **concave** ;
- La dérivée f' de f est croissante sur l'intervalle $[k;b]$ (les pentes des tangentes à la courbe croissent sur $[k;b]$). La courbe est dite **convexe**
- Au point K, il y a changement de courbure. On dit que K est un **point d'inflexion** de la courbe.

Mathématiquement :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I =]m;n[$.

Une fonction f est dite **convexe** (respectivement **concave**) sur I si pour tout $a \in I$, la courbe $y = f(x)$ est au-dessus (respectivement au-dessous) de la tangente en $(a; f(a))$.
Plus précisément :

fct au-dessus tgte

— **convexe** sur I si $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$ pour tout $x, a \in I$

— **concave** sur I si $f(x) \leq f(a) + f'(a)(x-a)$ pour tout $x, a \in I$

au-dessous

S'il existe $c \in]m;n[$ avec $y = f(x)$ concave (respectivement convexe) sur $]m;c[$ et convexe (respectivement concave) sur $]c;m[$, on dit que c est un **point d'inflexion** de la courbe.

Courbure et dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert $I =]m;n[$. Notons $f'' = (f')'$ la dérivée seconde.

1. f est convexe sur $I \iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$
2. f est concave sur $I \iff f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$

$f''(x) = 0$ alors $(x; f(x))$ est un point d'inflexion

$\Rightarrow$ étude de signe de f''

Exemple
Etudier la courbure de la fonction f définie par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 6$.

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$

$f''(x) = 12x - 6 = 6(2x-1)$ zéro(s) de f'' : $\frac{1}{2}$ pas de v.i.

x		$1/2$	
sgn(f'')	$-$	0	$+$
courbure(f)	$\cap$	I	$\cup$

pt d'inflexion $\Rightarrow$ $I\left(\frac{1}{2}; f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{25}{2}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 18 + 6 = -\frac{25}{2}$