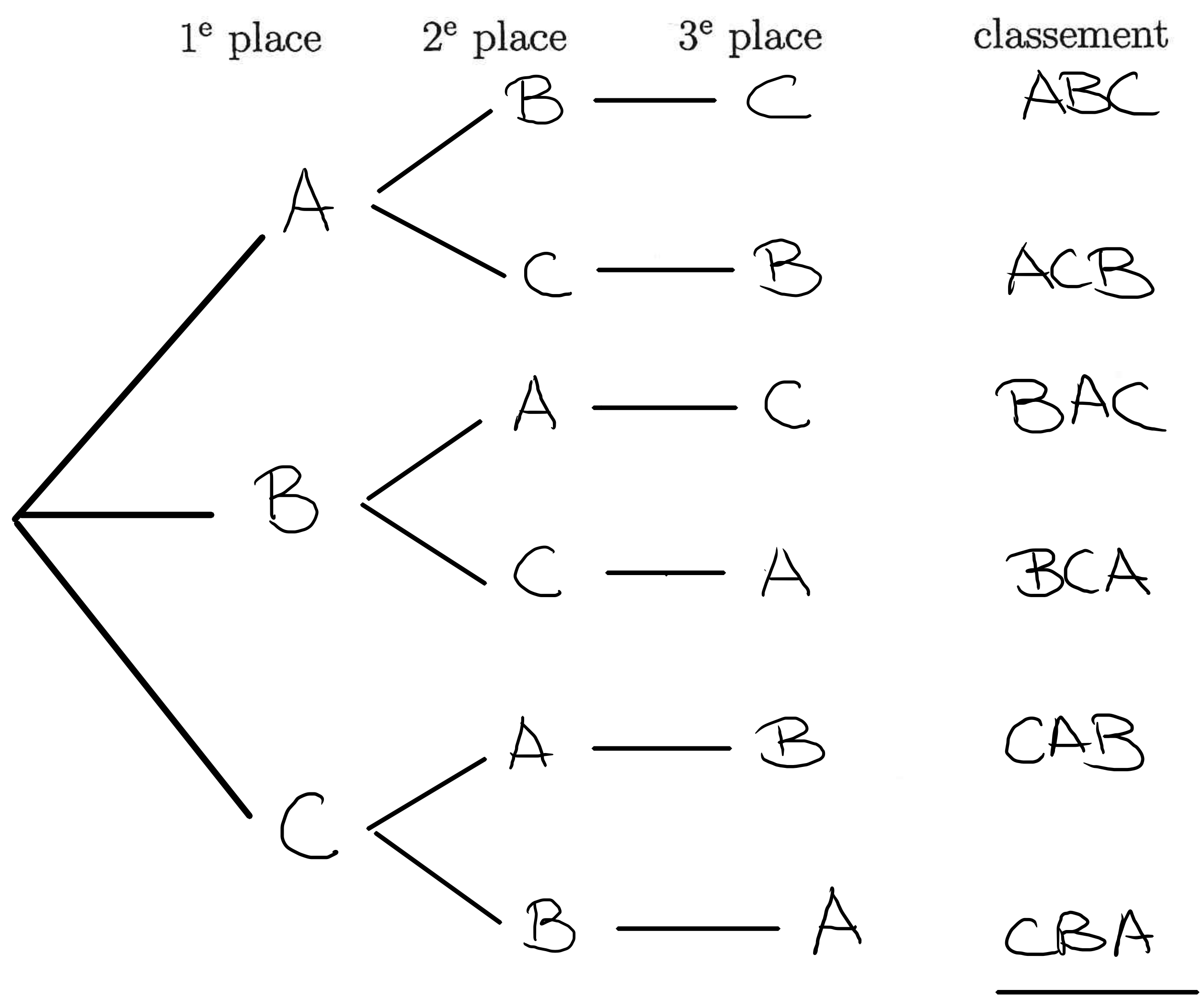
Combinatoire

L'analyse combinatoire est l'étude des différentes méthodes qui permettent de déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble fini vérifiant une propriété donnée, elle permet de répondre à des questions telles que : "Combien de nombres différents de 4 chiffres peut-on former ?" ou bien "Dans une classe de 24 élèves, on doit élire deux délégués de classe. Combien existe-t-il de paires différentes possibles ?"
La connaissance de ces méthodes de dénombrement est indispensable au calcul élémentaire des probabilités.

1. Principes fondamentaux

Exemple d'introduction

Supposons que trois équipes participent à un tournoi dans lequel sont déterminées une première, une deuxième et une troisième place. Pour faciliter l'identification des équipes, nous allons les désigner par les lettres A, B, C.
Cherchons le nombre de manières différentes permettant d'attribuer le classement de ces 3 équipes. On peut illustrer ce raisonnement par un diagramme en arbre.



$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ classements

On remarque que le nombre de possibilités de classement (6) est le produit du nombre de possibilités (3) d'attribuer la première place, par le nombre de possibilités (2) d'attribuer la deuxième place (après que la première place a été attribuée), par le nombre de possibilités (1) d'attribuer la troisième place (les deux premières étant déjà fixées).

Le raisonnement ci-dessus illustre la règle générale suivante, que nous utiliserons comme axiome fondamental :

Le principe de multiplication :

Si un premier choix peut être effectué de n_1 manières différentes, puis un second choix peut être effectué de n_2 manières différentes, puis un troisième choix peut être effectué de n_3 manières différentes et ainsi de suite jusqu'à un k-ième choix qui peut être effectué de n_k manières différentes.
Alors l'ensemble de tous ces choix peut être effectué de $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ manières différentes.

Remarques :

1. L'analyse combinatoire n'est pas l'énumération de toutes les possibilités (souvent long et fastidieux) mais bien le dénombrement de celle-ci par un calcul.
2. Le plus souvent les arbres sont gigantesques, donc difficilement réalisables. On leur préférera souvent le modèle "gobelets" qui permet de compter le nombre de possibilités de les remplir.

Dans l'exemple d'introduction, on constate que l'on peut dénombrer

Soit par rapport au classement :

$$\underset{1^e}{3} \cdot \underset{2^e}{2} \cdot \underset{3^e}{1} = 6$$

Soit par rapport à l'équipe :

$$\underset{A}{3} \cdot \underset{B}{2} \cdot \underset{C}{1} = 6$$

Ce ne sera pas toujours le cas. Il s'agira alors de choisir le bon titre des gobelets.

Exemples

21 élèves

1. Une classe se compose de 12 filles et 9 garçons. De combien de façons peuvent être choisis un président de classe, un trésorier et un secrétaire, si le trésorier doit être une fille, le secrétaire un garçon, et si un étudiant ne peut exercer plus d'une charge ?

P T S

$19 \cdot 12 \cdot 9 = 2052$ façons

$21 - 2 = 19$

1T 1S

De manière général, il faut commencer par les choix les plus restrictifs et continuer par ordre décroissant de sévérité.

2. Combien peut-on former de nombres de quatre chiffres différents, si ces nombres doivent être des multiples de 5 ?

0

$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 504$

$+$

5

$8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 448$

10 chiffres $- 2 = 8$

chiffre 5 chiffre 0

952 nbres

Dans certaines situations, il est nécessaire de faire une décomposition en plusieurs cas qui s'excluent mutuellement. Il faut alors dénombrer les différents cas puis les additionner.

On compte 3 méthodes de dénombrement : les permutations, les arrangements et les combinaisons.

ex 3.1.1 à ex 3.1.4

2. Les permutations

Exemples d'introduction

1. Combien de codes de 3 lettres peut-on former avec les lettres A, B et C en n'utilisant qu'une seule fois chaque lettre ?

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ codes}$$

2. Combien de codes de cadenas à 10 chiffres peut-on former en n'utilisant qu'une seule fois chaque chiffre ?

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \ldots \ldots 2 \cdot 1 = 3'628'800 \text{ codes}$$
$$= 10!$$

Définition :
On appelle **n factorielle** ($n \in \mathbb{N}^*$) et l'on note $n!$ le fonction définie par

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \text{ si } n \neq 0$$

Par convention, on définit $0! = 1$

Remarque : On trouve sur les calculatrices la fonction $\boxed{x!}$.

Exemples

1. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
2. $15! = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cong 1{,}31 \cdot 10^{12}$
3. $\dfrac{70!}{67!} = \dfrac{70 \cdot 69 \cdot 68 \cdot \cancel{67} \cdot \cancel{66} \cdot \ldots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{67} \cdot \cancel{66} \cdot \ldots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 70 \cdot 69 \cdot 68 = 328'440$
4. Combien de plans de classe peut-on faire pour placer les 26 élèves de la classe s'il y a exactement 26 places à disposition ?

$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot \ldots$

$$26! \cong 4{,}03 \cdot 10^{26} \text{ plans}$$

Définition :
On dispose de n objets. On appelle **permutation** une disposition ordonnée des n objets.
On distingue des permutations

- **sans répétition** : tous les objets sont distincts. On note P_n le nombre de ces permutations.
- **avec répétitions** : lorsqu'il y a des objets indiscernables parmi la collection. On note $\overline{P}_n(r_1; ...; r_k)$ le nombre de permutations de n objets avec répétitions où r_1, ..., r_k désignent le nombre d'objets identiques.

Remarques :

1. Selon le modèle "gobelet", il y autant de gobelets que d'objets à placer.
2. L'ordre de disposition dans ces gobelets est important.

Exemples

1. Combien d'anagrammes du mot $\overbrace{\text{GYMNASE}}^{7 \text{ lettres}}$ peut-on former ?

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1 = P_7 = 7! = 5'040 \text{ anag.}$$

2. Même question avec le mot $\overbrace{\text{PROFESSIONS}}^{11 \text{ lettres}}$.

$$11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 1 = 11!$$

mais on a 3x la lettre S
et 2x " O

La permutation des 3 lettres S ne modifie pas le mot, on va alors diviser le résultat par le nombre de ces permutations : 3!
et de même pour les deux lettres O.

$$\overline{P}_{11}(3;2) = \frac{11!}{3! \cdot 2!} = 3'326'400$$

On a ainsi les formules suivantes :

$$\boxed{P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!}$$

c'est le principe de multiplication

$$\boxed{\overline{P}_n(r_1; r_2 ...; r_k) = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots r_k!}}$$

m̂ justification que l'exple précédent.

Exemple

Un libraire possède, parmi ses livres, 5 livres de maths, 3 livres de chimie et 6 livres de physique.

1. De combien de manières peut-il les ranger sur une étagère s'ils sont tous différents ?

14 livres

$$P_{14} \cong 8,72 \cdot 10^{10}$$

2. Même question mais les livres traitant de la même matière sont placés les uns à côté des autres.

M Ch. Ph.

$$\underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{3} \cdot \underbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}_{2} \cdot \underbrace{6!}_{1}$$

$$= P_5 \cdot P_3 \cdot P_6 \cdot P_3$$
$$= 5!\ 3!\ 6!\ 3!$$
$$= 3'110'400$$

3. De combien de manières peut-il les ranger sur une étagère si les 5 livres de maths sont identiques, les 3 livres de chimie sont identiques et les 6 livres de physique également ?

$$\overline{P}_{14}(5;3;6) = \frac{14!}{5!\ 3!\ 6!} = 168'168$$

Remarque : Il faut parfois décomposer chronologiquement les différentes étapes de rangement, les dénombrer afin de multiplier ensuite les réponses individuelles obtenues.

3. Les arrangements

Exemples d'introduction

1. Combien de nombres de deux chiffres distincts peut-on écrire avec les chiffres 5, 6, 7 et 8 ?

$$\underbrace{4}\cdot\underbrace{3} = 12 \text{ nbres} = A_2^4$$

2. Combien de nombres de quatre chiffres peut-on écrire avec les chiffres 1 et 2 ?

$$\underbrace{2}\cdot\underbrace{2}\cdot\underbrace{2}\cdot\underbrace{2} = 2^4 = 16 \text{ nbres} = \overline{A}_4^2$$

Définition :
On dispose de n objets. On appelle

— **arrangement sans répétition** une disposition ordonnée de p éléments distincts choisis parmi les n objets ($1 \leqslant p \leqslant n$) et on note A_p^n le nombre de ces arrangements

— **arrangement avec répétitions** une disposition ordonnée de p éléments choisis parmi les n objets avec d'éventuelles répétitions ($1 \leqslant p$) et on note $\overline{A}_p^n$ le nombre de ces arrangements avec répétitions. (ici p peut être plus grand que n)

Remarques :

1. L'ordre d'écriture est très important (dans le 1e exemple, les nombres 56 et 65 sont différents).
2. Dans le modèle "gobelets", il y a plus d'éléments à placer que de gobelets à disposition.

On a les formules suivantes :

$$\boxed{A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

En effet :

$$\underbrace{n}_{1^e}\cdot\underbrace{(n-1)}_{2^e}\cdot\underbrace{(n-2)}_{3^e}\cdot\ \ldots\ \cdot\underbrace{(n-p+1)}_{p^e}$$

p gobelets et n objets à disposition

$n!$ auquel on enlève les $(n-p)!$ facteurs ce qui donne $\frac{n!}{(n-p)!}$

Exple : $A_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}} = 7\cdot 6\cdot 5$
$= 210$

à la m.à.c : $7\ \boxed{2nd}\ \boxed{9}\ 3 = 210$

et

$$\boxed{\overline{A}_p^n = n^p}$$

En effet : On dispose de p objets choisis parmi n

$$\underbrace{n}_{1^e} \cdot \underbrace{n}_{2^e} \cdot \underbrace{n}_{} \cdot \ldots \cdot \underbrace{n}_{p^e} = n^p$$

Remarques :

1. Les permutations correspondent au cas particulier des arrangements de tous les objets :
$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! = P_n$$
2. Les calculatrices ont une touche qui permet de calculer directement A_p^n. $\boxed{2nd}$ $\boxed{9}$ nPr

Exemples

1. Combien de mots de cinq lettres distinctes peut-on former avec le mot EQUATIONS ?

9 lettres distinctes

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = A_5^9 = 15'120 \text{ mots}$$

2. Une fiduciaire nomme chaque dossier avec un code de 3 lettres distinctes suivies de 2 chiffres distincts. Combien y a-t-il de codes possibles ?

$$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 = A_3^{26} \cdot A_2^{10} = 1'404'000 \text{ codes}$$

4. Les combinaisons

Exemple d'introduction :
Quatre personnes A, B, C et D désirent jouer au tennis de table en double. Combien d'équipes différentes peuvent-elles former ?

{A;B} {A;C} {A;D} {B;C} {B;D} {C;D}
6 équipes

Remarques :

1. Une combinaison est caractérisée uniquement par le choix des objets.
2. Une combinaison n'est pas caractérisée par l'ordre des objets. L'équipe {A ;B} ne diffère pas de l'équipe {B ;A} .
3. On ne peut pas utiliser le modèle gobelet, car celui-ci induit un choix ordonné ; ce qui n'est pas le cas lors de combinaisons.

Définition :
On appelle **combinaison** une disposition non ordonnée de p éléments distincts choisis parmi n objets ($1 \leqslant p \leqslant n$).
On note C_p^n le nombre de combinaisons.

On a la formule suivante :

$$\boxed{C_p^n = \frac{n!}{(n-p)!p!}}$$

En effet : On détermine le nbre d'arrangements (sans répétition) $A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}$
(ici l'ordre est important)
et on divise par le nbre de permutations des p objets : $p!$
(pour "défaire" l'ordre)

Exple précédent : $C_2^4 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 3}{2!} = 6$ équipes

Remarques :

1. Les calculatrices ont une touche qui permet de calculer directement C_p^n. n $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{8}$ p
2. La notion de combinaison avec répétitions existe, mais nous ne l'étudierons pas dans le cadre de ce cours.

Exemples :

1. De combien de manières différentes peut-on former un comité de trois personnes à partir d'une classe de 24 élèves ?

$C_3^{24} \left(= \frac{24\cdot 23\cdot 22}{3!}\right) = 2'024$ comités

2. Combien de mains (tirages) différentes de six cartes peut-on obtenir à partir d'un jeu de 36 cartes ?

$$C_6^{36} = 1'947'792 \text{ mains}$$

Parmi celles-ci, combien contiennent les 4 valets ?

$$\underbrace{C_4^4}_{=1} \cdot C_2^{\overset{36-4 \text{ valets}}{32}} = 1 \cdot 496 = 496 \text{ mains}$$

Combien contiennent au moins 1 valet ?

1 valet ou 2 valets ou 3 valets ou 4 valets

$$C_1^4 \cdot C_5^{32} + C_2^4 \cdot C_4^{32} + C_3^4 \cdot C_3^{32} + C_4^4 \cdot C_2^{32}$$

$$= \ldots$$

Dans le cas de « au moins un », on peut dénombrer la situation « aucun » que l'on déduit du dénombrement « total ».

"au moins un" = "tout" − "aucun"

$$C_6^{36} - C_6^{32} = 1'041'600$$

3. Combien y a-t-il de possibilités à l'Euromillions ? Pour rappel, il faut trouver 5 bons numéros parmi 50 à choix et 2 étoiles parmi 12.

$$C_5^{50} \cdot C_2^{12} = 2'118'760 \cdot 66 = 139'838'160 \text{ poss.}$$