Règles de dérivation (suite)

6) $$\boxed{\big((f\circ g)(x)\big)' = \big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))\cdot \underline{g'(x)}}$$

dérivée interne

dém : $$\big((f\circ g)(a)\big)' = \lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

quand $x\to a$
$g(x)\to g(a)$
car g est continue
(car dérivable par hyp)

$$= \lim_{g(x)\to g(a)}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$= f'(g(a))\cdot g'(a) \qquad \#$$

Cas particulier : $$\boxed{(u^n)' = n\cdot u^{n-1}\cdot u'}$$ avec $u=u(x)$ une fct de x

dérivée interne

$$\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

Exples

a) $$\big((2x^2+x+1)^3\big)' = 3(2x^2+x+1)^2\cdot(4x+1)$$

b) $$\big(\sqrt{5x^2+2x+1}\big)' = \frac{10x+2}{2\sqrt{5x^2+2x+1}} = \frac{5x+1}{\sqrt{5x^2+2x+1}}$$

c) $$\big((2x+1)^4(3x^4-1)^2\big)' = 8(2x+1)^3(3x^4-1)^2 + 24x^3(2x+1)^4(3x^4-1)$$

$u=(2x+1)^4$
$u' = 4(2x+1)^3\cdot 2$
$= 8(2x+1)^3$

$v=(3x^4-1)^2$
$v' = 2(3x^4-1)\cdot 12x^3$
$= 24x^3(3x^4-1)$

$$= 8(2x+1)^3(3x^4-1)\left[(3x^4-1)+3x^3(2x+1)\right]$$

$$= 8(2x+1)^3(3x^4-1)(9x^4+3x^3-1)$$

$(= \ \ldots)$