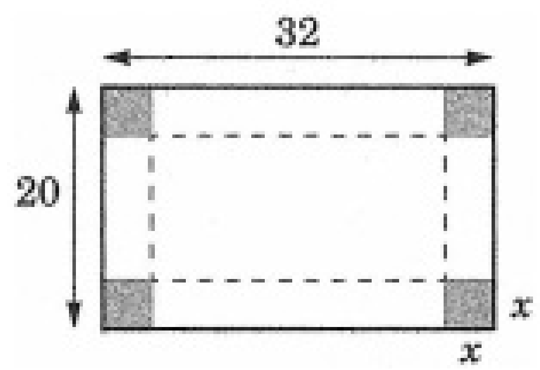
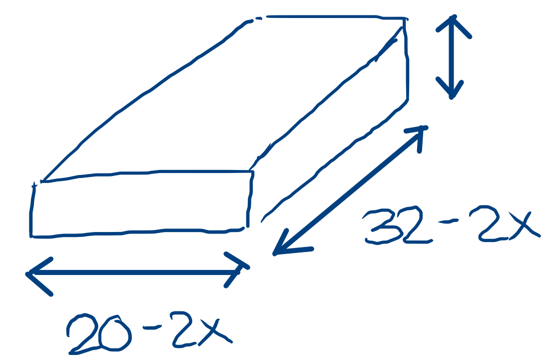
Optimisation

2.10.14 On construit une boîte rectangulaire sans couvercle en découpant quatre carrés aux coins d'une feuille de carton mesurant 32 cm sur 20 cm et en relevant ensuite les rectangles latéraux. Quelle doit être la dimension du carré enlevé pour obtenir la boîte de volume maximal ?

1) croquis :





2) variable(s) : x avec $0 < x < 10$

3) fonction à optimiser : volume

$$v(x) = x(20-2x)(32-2x) = 4x^3 - 40x^2 - 64x^2 + 640x$$
$$= 4x^3 - 104x^2 + 640x$$

- $v'(x) = 12x^2 - 208x + 640$ $\qquad \Delta = 112^2$

zéros : $x_{1,2} = \dfrac{208 \pm 112}{24} = \begin{cases} 40/3 \\ 4 \end{cases}$

$$\left(12\left(x - \tfrac{40}{3}\right)(x-4) \quad 4(3x-40)(x-4) \right)$$

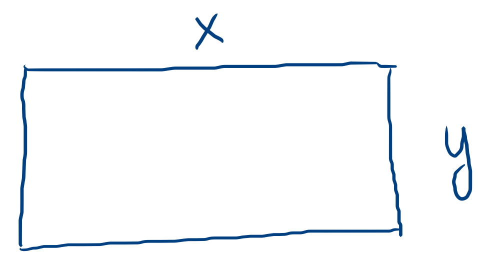
x	0		4		10	40/3
v'		+	0	−		
v		↗	Max	↘		

Max(4 ; 1152)

Le carré doit avoir un côté de 4 cm (pour un volume maximal de 1152 cm³).

2.10.12 Parmi tous les rectangles dont le périmètre est égal à 4 m, quel est celui qui a la plus grande surface ?

1) croquis :



2) variables : x et y cond : $0 < x, y < 2$

3) fct à optimiser : surface : $S(x;y) = xy$

4) contrainte :

$$\begin{aligned} \text{périmètre} &= 4 \\ 2x + 2y &= 4 \\ x + y &= 2 \\ y &= 2 - x \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad S(x) = x(2-x) = 2x - x^2$

• $S'(x) = 2 - 2x = 2(1-x) \Rightarrow$ zéro : 1

x	0		1		2
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$	Max	$\searrow$	

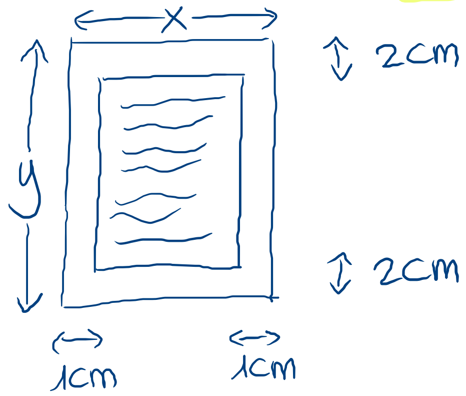
Max$(1;1)$

• $\Rightarrow \quad y = 2 - x = 2 - 1 = 1$

Il s'agit d'un carré de côté 1.

2.10.13 Une feuille rectangulaire doit contenir 392 cm^2 de texte imprimé. Les marges supérieure et inférieure doivent être de 2 cm chacune ; les marges latérales de 1 cm chacune. Déterminer les dimensions de la feuille nécessitant le moins de papier.

1) croquis :



2) variables : x et y   cond : $x, y > 0$

3) fct à optimiser : surface du papier : $S(x;y) = x \cdot y$

4) contrainte : surface texte imprimé : $(x-2)(y-4) = 392$

$$y - 4 = \frac{392}{x-2}$$

$$y = \frac{392}{x-2} + 4$$

- $\Rightarrow S(x) = x\left(\frac{392}{x-2} + 4\right) = \frac{392x}{x-2} + 4x$
- $S'(x) = \frac{392(x-2) - 392x \cdot 1}{(x-2)^2} + 4 = \frac{-784 + 4(x-2)^2}{(x-2)^2}$

$$= \frac{4x^2 - 16x - 768}{(x-2)^2}$$

zéros : $\Delta = 112^2 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{16 \pm 112}{8} = 16 \text{ ou } -12$

v.i. : 2 (2)

x	0		2		16	
S'		−	‖	−	0	+
S		↘	‖	↘	min	↗

min (16; 512)

$\Rightarrow x = 16$

$$y = \frac{392}{16-2} + 4 = 32$$

La feuille doit mesurer 16 x 32 cm^2