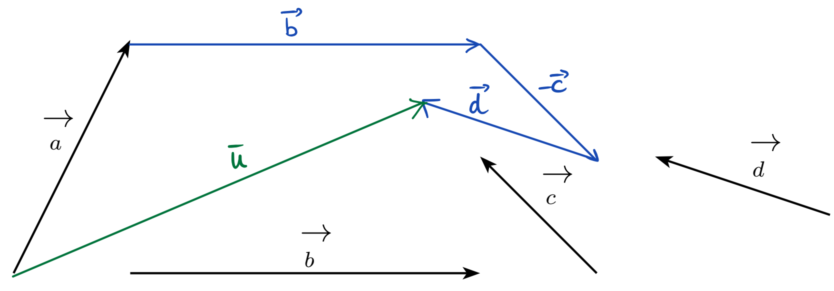
Vecteur

*Un **vecteur** est représenté par une flèche qui définit*

- une direction
- un sens
- une norme

1. Représenter ci-dessous le vecteur $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} + \vec{d}$



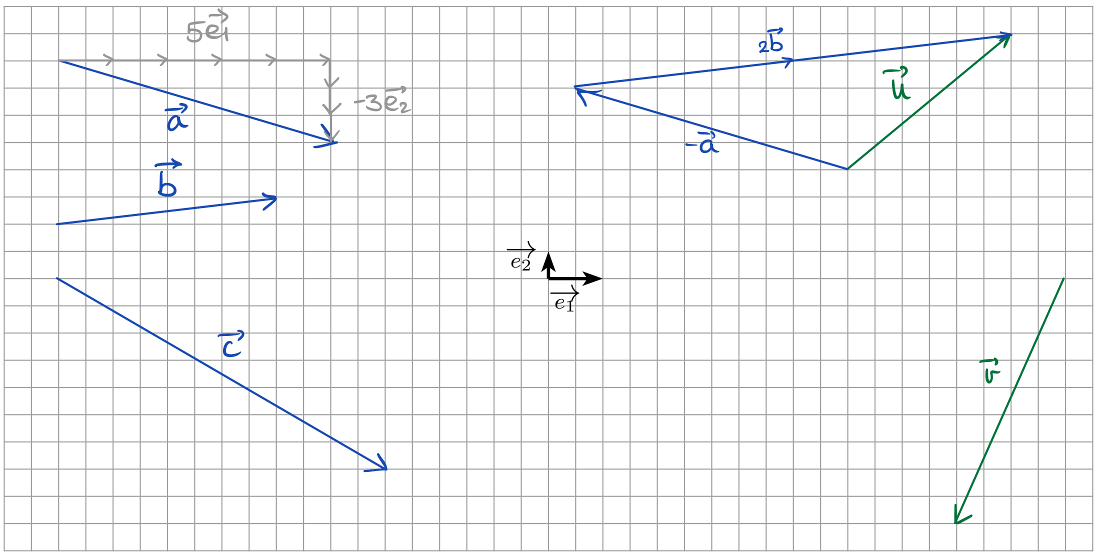
Qu'appelle-t-on deux vecteurs **colinéaires** ? deux vecteurs qui ont la même direction.

Base

*On munit l'ensemble $\mathcal{V}_2$ des vecteurs du plan d'une **base**, que l'on note $\mathcal{B} = (\vec{e_1}; \vec{e_2})$ formée d'un couple de vecteurs non colinéaires.*
On peut ainsi exprimer tout vecteur $\vec{a}$ comme combinaison linéaire de $\vec{e_1}$ et de $\vec{e_2}$:
$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ *où a_1 et a_2 sont des nombres réels, appelés **composantes**.*

2. Relativement à une base on donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = 6\vec{e_1} - 7\vec{e_2}$.

a) Représenter ci-dessous ces vecteurs.



b) Calculer les composantes de $\vec{u} = -\vec{a} + 2\vec{b}$ et de $\vec{v} = 2\vec{c} - 2\vec{a} - \vec{b}$ et les représenter.

$$\vec{u} = -\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+8 \\ 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = 2\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-10-4 \\ -14+6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Repère

En associant un point O (origine) à une base $(\vec{e_1}; \vec{e_2})$, on obtient un **repère** *du plan noté $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$. On peut alors placer un point d'après ses coordonnées.*

Différences entre coordonnées et composantes :

pour point $A(a_1, a_2)$ → pour vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

Lien entre coordonnées et composantes : $\boxed{A(a_1; a_2) \Leftrightarrow \vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}$

Relation de Chasles : $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} \Leftrightarrow \boxed{\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}}$

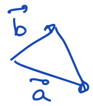
Comment déterminer si deux vecteurs sont colinéaires ? s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

ou si $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0$

Comment déterminer le ***milieu*** *d'un segment ?* $\boxed{M\left(\frac{a_1+b_1}{2} ; \frac{a_2+b_2}{2}\right)}$ (moyenne des coords)

Comment déterminer le ***centre de gravité*** *d'un triangle ?* $\boxed{G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3} ; \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)}$ (moyenne des coords)

*Comment calculer l'****aire d'un triangle*** *?* $\boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{a}, \vec{b})\right|}$ pour



3. On donne relativement à un repère les points $A(2; 5)$, $B(3; 8)$ et $C(-2; -7)$.

a) Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 8-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ -7-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -15 \end{pmatrix}$

b) Les points A ,B et C sont-ils alignés ?

oui car $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires, en effet $\vec{BC} = -5\vec{AB}$

ou $\det(\vec{AB}, \vec{BC}) = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -15 \end{vmatrix} = -15 + 15 = 0$

$1 \cdot (-15) - 3 \cdot (-15)$

c) Déterminer les coordonnées du milieu M du segment AC.

$M\left(\frac{2+(-2)}{2} ; \frac{5+(-7)}{2}\right) = M(0; -1)$

On donne relativement à un repère les points $D(2; 3)$, $E(5; 2)$, $F(-1; -1)$ et $H(1; -2)$.

d) Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle DEF.

$G\left(\frac{2+5+(-1)}{3} ; \frac{3+2+(-1)}{3}\right) = G\left(2; \frac{4}{3}\right)$

e) Calculer l'aire du triangle DEF. $\vec{DE} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{DF} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|-12-3\right| = \frac{1}{2}\left|-15\right| = \frac{15}{2}\ u^2$

f) $DEFH$ est-il un parallélogramme ? oui si $\vec{DE} = \vec{HF}$

$\left.\begin{array}{l} \vec{DE} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \vec{HF} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ -1-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}\right) \neq \Rightarrow$ non.

Norme et produit scalaire

*On appelle **norme** de $\vec{a}$ la "longueur" d'une flèche représentant ce vecteur et on note $\| \vec{a} \|$.*

*Dans une **base orthonormée**, si* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\| \vec{a} \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

*On définit aussi, dans une base orthonormée, le **produit scalaire*** $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Propriété : $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ $\quad = a_1 b_1 + a_2 b_2$

4.

a) Calculer la norme des vecteurs $\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\left\| \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$

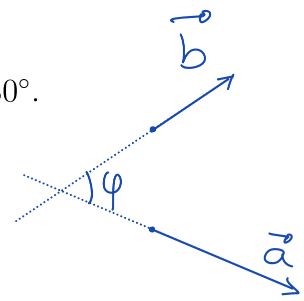
$$\left\| \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

b) On donne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix}$. Calculer $\vec{a} \cdot \vec{b}$ et $\vec{b} \cdot \vec{c}$. Que peut-on conclure ?

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = -12 + 2 = -10 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \not\perp \vec{b}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = -20 + 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{b} \perp \vec{c}$$

Le produit scalaire peut aussi être défini sous forme trigonométrique :
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \| \vec{a} \| \cdot \| \vec{b} \| \cdot \cos(\varphi)$ ou φ est l'angle formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et $0° \leqslant \varphi \leqslant 180°$.



Ainsi $\varphi = \cos^{-1}\left(\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} \right)$

c) Quel est la valeur de l'angle formé par les vecteurs $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$?

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = -8 + 18 = 10 \\ \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{16+9} = 5 \\ \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{10}{5 \cdot 2\sqrt{10}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \varphi \cong 71{,}57°$$