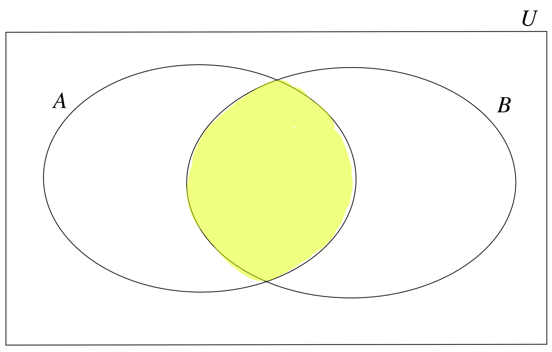
3. Approche mathématique de la notion de probabilité

Par analogie avec le langage ensembliste, on a les définitions et notations suivantes :

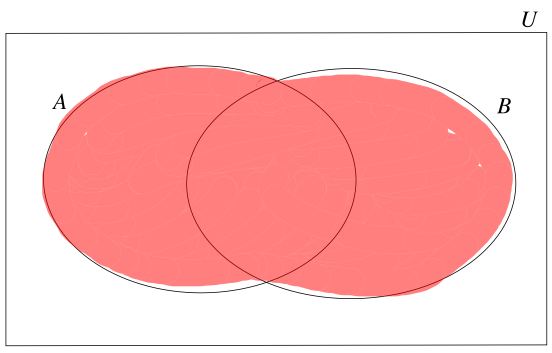
Définitions

Soit U l'univers d'une expérience aléatoire et A et B deux événements.

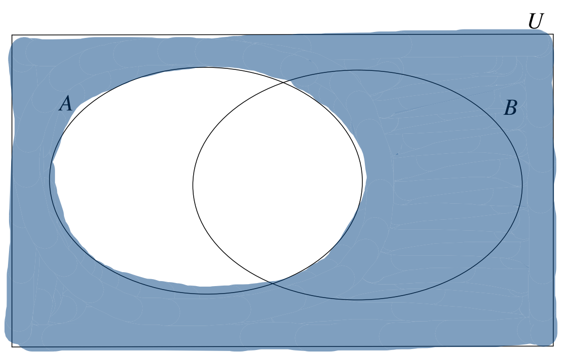
1. l'événement "A **et** B", noté $A \cap B$, se réalise lorsque A et B se réalisent en même temps.
   inter



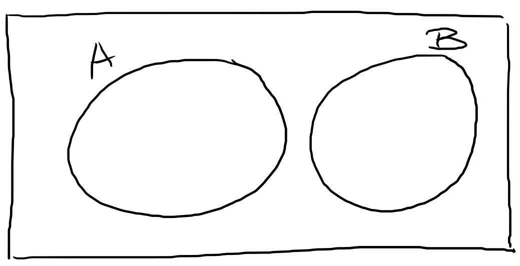
2. l'événement "A **ou** B", noté $A \cup B$, se réalise lorsque au moins un des deux événements A ou B se réalise.
   union



3. l'événement "**non** A", noté $\overline{A}$, est l'événement complémentaire de A et se réalise lorsque A ne se réalise pas.
   "A barre"



4. Deux événements sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se produire en même temps. Dans ce cas, $A \cap B = \varnothing$



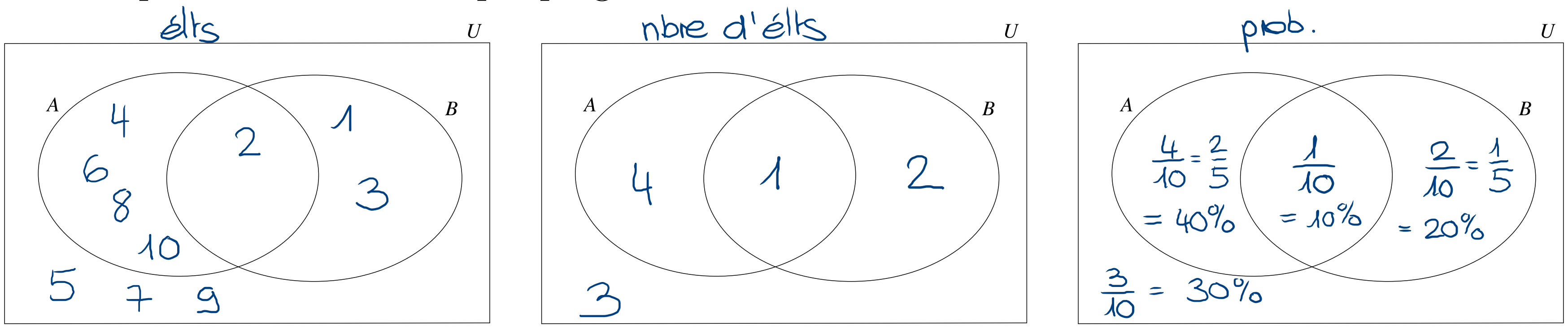
Exemple 5

On choisit un nombre entre 1 et 10 au hasard et on considère les évènements suivants :
A : "obtenir un nombre pair" et B : "obtenir un nombre inférieur à 4"
Représenter cette situation en notant :

— tous les éléments dans le premier diagramme de Venn ci-dessous ;

— le nombre d'éléments de chaque plage dans le deuxième ;

— les probabilités de chaque plage dans le troisième.



$P(A) =$ 50% $P(B) =$ 30%

$P(A \cap B) =$ 10% $P(A \cup B) =$ 70 %

$P(\overline{A}) =$ 50 % $P(\overline{B}) =$ 70%

$P(\overline{A \cap B}) =$ 90% $P(\overline{A \cup B}) =$ 30%

$P(U) =$ 100% $P(\varnothing) =$ 0%

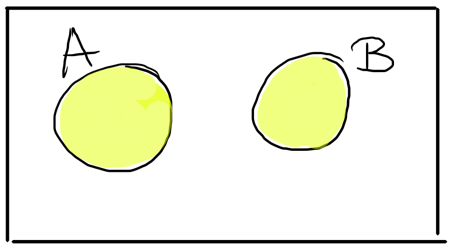
Axiomes de probabilité

Soit U l'univers d'une expérience aléatoire.
A chaque événement A, une probabilité associe un nombre réel $P(A)$ satisfaisant les axiomes suivants :

— $P(A) \geq 0$

— $P(U) = 1$

— Si A et B sont **incompatibles** ($A \cap B = \emptyset$)
alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



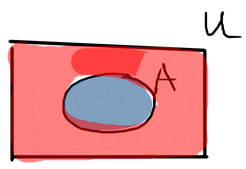
Propriétés d'une probabilité

1. **Valeur de la probabilité d'un événement**

   $0 \leq P(A) \leq 1$

2. **Probabilité de l'événement contraire**

   $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ $= P(U)$



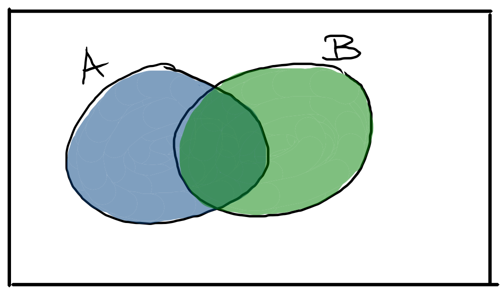
$\Leftrightarrow$ $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

"tout − contraire"

3. **Probabilité d'une union de deux événements**

   Pour deux événements A et B quelconques

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



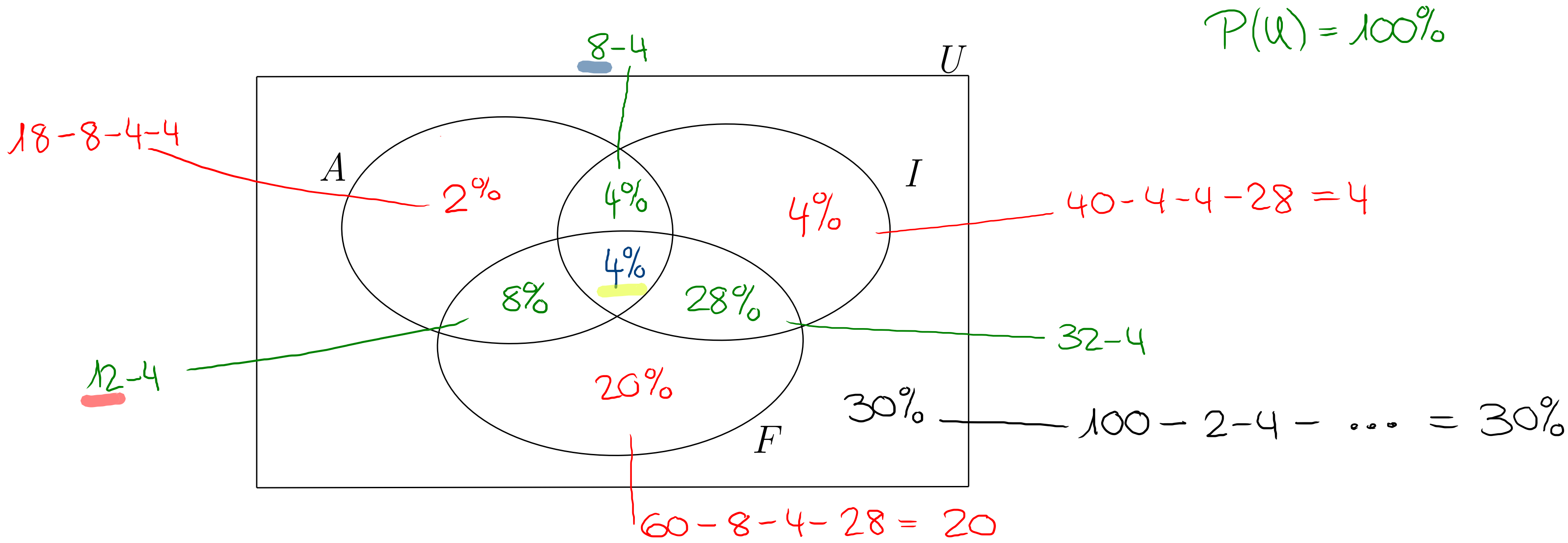
Si on calcule $P(A) + P(B)$ on compte à double $P(A \cap B)$. C'est pourquoi on doit la soustraire.

3. $\Rightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

Exemple 6

Dans le camping, 60% des vacanciers comprennent au moins le français, 40% au moins l'italien, 18% au moins l'anglais, 32% au moins le français et l'italien, 12% au moins le français et l'anglais, 8% au moins l'italien et l'anglais et 4% comprennent les trois langues.

$P(U) = 100\%$



Compléter le diagramme de Venn de la situation et la probabilité qu'un vacancier comprenne...

a) l'anglais 18% $= p(A)$

b) l'anglais uniquement 2%

c) exactement 2 de ces 3 langues

$8 + 4 + 28 = 40\%$

d) au moins 2 des 3 langues

$40 + 4 = 44\%$

e) aucune de ces 3 langues

$100 - 70 = 30\%$