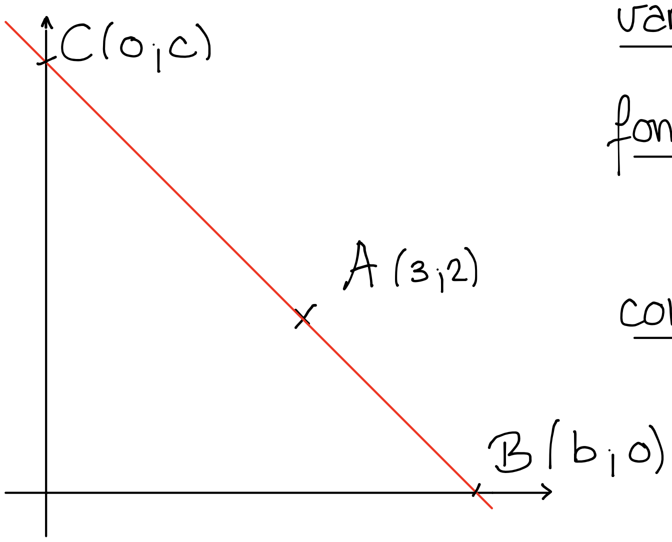
Ex 2.10.17



variables : b et c $\quad b, c > 0$

fonction à optimiser : aire du triangle

$$f(b;c) = \frac{b \cdot c}{2}$$

contrainte : A, B et C appartiennent à la droite d d'équation

$$d : y = mx + h \quad \text{avec } m < 0$$

$A(3;2) \in d \Rightarrow 2 = m \cdot 3 + h \Leftrightarrow h = 2 - 3m \Rightarrow \boxed{d : y = mx + 2 - 3m}$

$B(b;0) \in d \Rightarrow 0 = mb + 2 - 3m \Leftrightarrow b = \dfrac{-2+3m}{m}$

$C(0;c) \in d \Rightarrow c = 2 - 3m$

$$\Rightarrow f(m) = \frac{\frac{2-3m}{m} \cdot (2-3m)}{2} = \frac{(2-3m)^2}{2m} \qquad EV(f) =]-\infty; 0[$$

$$= \frac{4 - 12m + 9m^2}{2m}$$

$$\Rightarrow f'(m) = \frac{(18m-12)\cdot\cancel{2}m - (4-12m+9m^2)\cdot\cancel{2}}{2\,\cancel{4}m^2} = \frac{18m^2 \cancel{-12m} - 4 \cancel{+12m} - 9m^2}{2m^2}$$

$$= \frac{9m^2 - 4}{2m^2} = \frac{(3m-2)(3m+2)}{2m^2}$$

zéros : $\pm \frac{2}{3}$

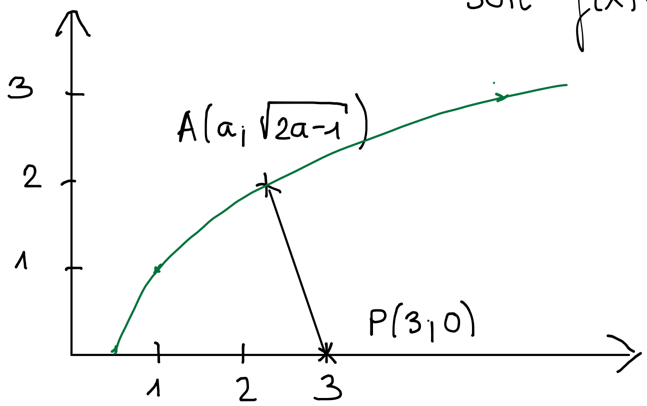
v.i. : 0 (2)

m		$-2/3$		0	
$f'(m)$	$-$	0	$+$	||	
f	↘	min	↗	||	

$$\Rightarrow h = 2 - 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 4 \quad \Rightarrow \boxed{d : y = -\frac{2}{3}x + 4}$$

Ex 2.10.18

soit $f(x) = \sqrt{2x-1}$, $ED(f) = [\frac{1}{2}; +\infty[$



variable : $a > \frac{1}{2}$

fonction à optimiser : distance de P à A

$$d(a) = \sqrt{(a-3)^2 + (\sqrt{2a-1} - 0)^2}$$
$$= \sqrt{a^2 - 6a + 9 + 2a - 1}$$
$$= \sqrt{a^2 - 4a + 8}$$

et $EV(d) = [\frac{1}{2}; +\infty[$

$$\Rightarrow d'(a) = \frac{2a-4}{2\sqrt{a^2-4a+8}} = \frac{a-2}{\sqrt{a^2-4a+8}}$$

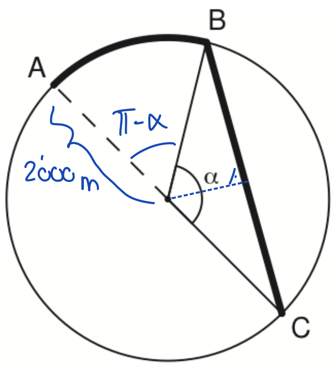
zéro : 2

v.i : $]-\infty; \frac{1}{2}]$

a		$1/2$		2	
$d'(a)$		||	$-$	0	$+$
d		||	$\searrow$	min	$\nearrow$

$\Rightarrow$ $A(2; \sqrt{3})$ car $f(2) = \sqrt{3}$ et la distance vaut $d(2) = 2$ u.

Ex 2.10.21



$\overset{\frown}{AB} = 2000(\pi - \alpha)$ m.

$\overline{BC} = 2 \cdot 2000 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 4000 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ m.

fct à optimiser : coût : $c(\alpha)$

variable : α avec $0 \leq \alpha \leq \pi$

(1 variable $\Rightarrow$ pas de contrainte)

$$\Rightarrow \quad c(\alpha) = 3'000 \cdot 2'000(\pi - \alpha) + 5'000 \cdot 4'000 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$= 6 \cdot 10^6 (\pi - \alpha) + 2 \cdot 10^7 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

étude de crssce de c :

$$c'(\alpha) = 6 \cdot 10^6 \cdot (-1) + 2 \cdot 10^7 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = -6 \cdot 10^6 + 10^7 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

zéro de c' : $c'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 10^7 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 6 \cdot 10^6$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 6 \cdot 10^{-1} = 0{,}6$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{2} \cong \pm 0{,}93 + k \cdot 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \cong \pm 1{,}85 + k \cdot 4\pi$$

α	0		~1,85		π
c'		+	0	−	
c	min₁	↗	Max	↘	min₂

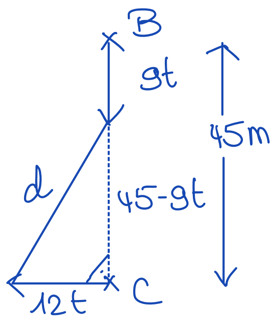
minimum au bord de l'intervalle : $\min_1(0; 6 \cdot 10^6)$ et $\min_2(\pi; 2 \cdot 10^7)$

$\Rightarrow \quad \alpha = 0°$

$\Rightarrow$ la canalisation doit être uniquement terrestre pour un coût minimal de 6 millions de CHF.

Ex 2.10.22

croquis :



fct à optimiser : distance en fct du temps t

variable : t avec $t \geq 0$

$$\Rightarrow \quad d(t) = \sqrt{(45-9t)^2 + 144t^2} = \sqrt{225t^2 - 810t + 2025}$$

étude de crssce de d :

$$d'(t) = \frac{450t - 810}{2\sqrt{225t^2 - 810t + 2025}} = \frac{225t - 405}{\sqrt{\dots}}$$

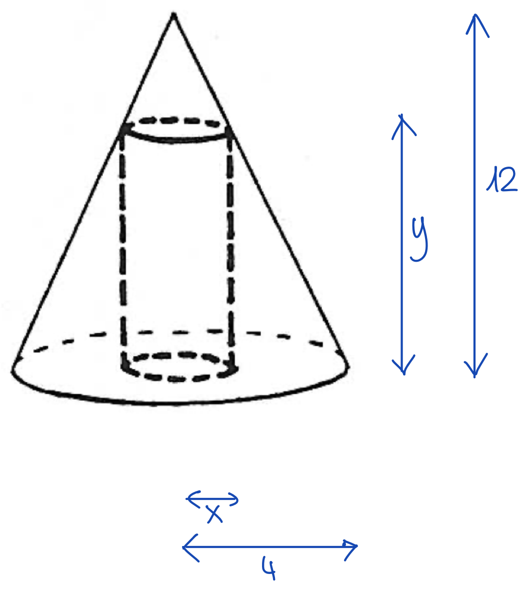
zéro de d' : $t = \frac{405}{225} = \frac{9}{5} = 1{,}8 = 1h48'$

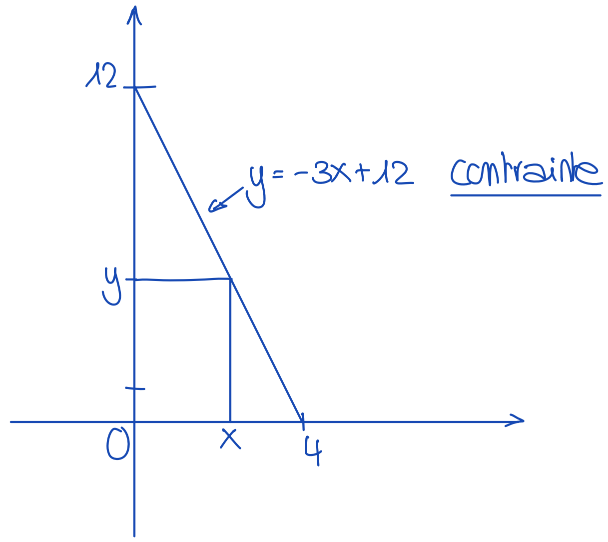
t	0		9/5	
d'		$-$	0	$+$
d		↘	min	↗

$\min\left(\frac{9}{5} ; 36\right)$

les bateaux seront à une distance minimale à 13h48

Ex 2.10.25





fct à optimiser : volume : $v(x;y) = \pi x^2 y$

variables : x et y avec $0 < x < 4$ et $0 < y < 12$

contrainte : $y = -3x+12$

$\Rightarrow \quad v(x) = \pi x^2(-3x+12) = \pi(-3x^3+12x^2)$

étude de la crssce de v

$v'(x) = \pi(-9x^2+24x) = 3\pi x(-3x+8) \quad \Rightarrow$ zéro de v' : 0 et $\frac{8}{3}$

x	0		8/3		4
v'	0	+	0	−	
v		↗	Max	↘	

$\sim$ Max$\left(\frac{8}{3}; 89{,}36\right)$

$\Rightarrow \quad y = -3 \cdot \frac{8}{3} + 12 = 4$

$\Rightarrow$ le cylindre doit mesurer 4 cm de haut pour un rayon de $\frac{8}{3} = 2{,}\bar{6}$ cm pour un volume maximal.