Ex 2.10.10

f) $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{(2-x)^2} = \dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-4x+4}$ zéro : -1 (3)
v.i : 2 (2)

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

2) Parité : ni paire ni impaire vu $ED(f)$. Périodicité : pas de période

3) Signe :

x		-1		2	
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$
		(3)		(2)	

4) Asymptotes :

AV/ trou : $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \overset{"\frac{27}{0}"}{=} \infty \Rightarrow$ AV en $x=2$

AH / AO : $\deg(N) = \deg(D)+1 \Rightarrow$ AO

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2+3x+1 & x^2-4x+4 \\ \cline{2-2} -x^3+4x^2-4x & x+7 \\ \cline{1-1} 7x^2-x+1 & \\ -7x^2+28x-28 & \\ \cline{1-1} 27x-27 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ AO en $y = x+7$

$$f(x) = x+7+\underbrace{\frac{27x-27}{x^2-4x+4}}_{=\delta(x)}$$

x		1		2	
$\delta(x)$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$
position	dessous	$\cap$	dessus	$\Vert$	dessus

coupe en $(1; f(1)) = (1; 8)$

5) Croissance : $f'(x) = \dfrac{3(x+1)^2(2-x)^2+2(x+1)^3(2-x)}{(2-x)^4}$

$$= \frac{(x+1)^2\cancel{(2-x)}\left[3(2-x)+2(x+1)\right]}{(2-x)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{(x+1)^2(8-x)}{(2-x)^3}$$

zéros : -1 (2) et 8
v.i. : 2 (3)

x		-1		2		8	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$
f	↗	palier	↗	‖	↘	min	↗

palier : $(-1;0)$ et min $\left(8;\frac{81}{4}\right)$

6) Courbure :

$$f''(x)=\frac{\left[2(x+1)(8-x)+(x+1)^2(-1)\right](2-x)^3-(x+1)^2(8-x)\cdot 3(2-x)^2\cdot(-1)}{(2-x)^6}$$

$$=\frac{(x+1)\left[\overbrace{2(8-x)-(x+1)}^{-3x+15}\right](2-x)^3+3(x+1)^2(8-x)(2-x)^2}{(2-x)^6}$$

$$=\frac{3(x+1)\cancel{(2-x)^2}\left[(-x+5)(2-x)+(x+1)(8-x)\right]}{(2-x)^{\cancel{6}\,4}}$$

$$=\frac{3(x+1)(\cancel{x^2}\cancel{-7x}+10\cancel{-x^2}\cancel{+7x}+8)}{(2-x)^4}=\frac{54(x+1)}{(2-x)^4}$$

x		-1		2	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	‖	$+$
f	∩	I	∪	‖	∪

Point d'inflexion $I(-1;0)$

7) graphe : cf solutions.

g) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

1) $ED(f) = [-1;1]$ car $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) \geq 0$

x		-1		1	
	$-$	0	$+$	0	$-$

2) parité : $f(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2} = f(x) \Rightarrow f$ est paire

3) signe :

x	-1		1	
f	0	$+$	0	

4) asymptotes : AV aucune car pas de v.i.

AH/AO aucune vu l'$ED(f)$

5) croissance :

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$ED(f') =]-1;1[$ et zéro de f' : 0

x	-1		0		1
f'		$+$	0	$-$	
f	min_1	$\nearrow$	Max	$\searrow$	min_2

$min_1(-1;0)$
$Max(0;1)$
$min_2(1;0)$

6) courbure :

$$f''(x) = \frac{-\sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{\frac{-(1-x^2)-x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$ED(f'') =]-1;1[$ et aucun zéro pour f''

x	-1		1
f''		$-$	
f		$\cap$	

7) graphe : cf solutions.

k) $f(x) = \sin(x) + \sqrt{3}\cos(x)$

1) $ED(f) = \mathbb{R}$

2) parité : $f(-x) = \sin(-x) + \sqrt{3}\cos(-x) = -\sin(x) + \sqrt{3}\cos(x) \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow$ ni paire ni impaire

périodicité : $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sont périodique de période 2π

$\Rightarrow$ f est périodique de période 2π

$f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) + \sqrt{3}\cos(x+2\pi) = f(x)$

$\Rightarrow$ on étudie la fonction sur $[0;2\pi]$

3) signe : zéro : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) + \sqrt{3}\cos(x) = 0$

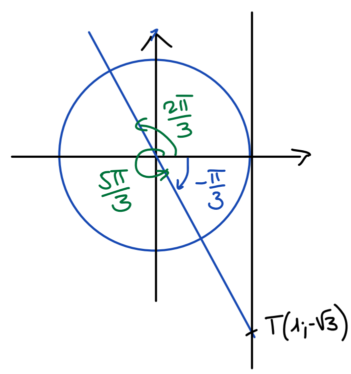
$\Leftrightarrow \sin(x) = -\sqrt{3}\cos(x) \Leftrightarrow \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \tan(x) = -\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) + k\cdot\pi$ entre $[0;2\pi]$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{3} + k\cdot\pi$ entre $[0;2\pi]$

$\Leftrightarrow x = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{3} \\ \dfrac{5\pi}{3} \end{cases}$



x	0		$2\pi/3$		$5\pi/3$		2π
f		$+$	0	$-$	0	$+$	

4) asymptotes : aucune (vu $ED(f)$ et période)

5) croissance : $f'(x) = \cos(x) - \sqrt{3}\sin(x)$

zéros de f' : $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 0 \iff \cos(x) = \sqrt{3}\sin(x)$

$\iff \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} = \sqrt{3} \iff \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\iff \tan(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\iff x = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) + k\cdot\pi = \dfrac{\pi}{6} + k\cdot\pi$ entre $[0;2\pi]$

$\iff x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{6}$

x	0		$\pi/6$		$7\pi/6$		2π
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	Max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

$\text{Max}\left(\dfrac{\pi}{6} ; 2\right)$

$\text{min}\left(\dfrac{7\pi}{6} ; -2\right)$

6) courbure : $f''(x) = -\sin(x) - \sqrt{3}\cos(x) = -f(x) \Rightarrow$ m̂ zéros que f. signes contraires.

x	0		$2\pi/3$		$5\pi/3$		2π
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\cap$	I_1	$\cup$	I_2	$\cap$	

$I_1\left(\dfrac{2\pi}{3} ; 0\right)$

$I_2\left(\dfrac{5\pi}{3} ; 0\right)$

7) graphe : cf solutions.