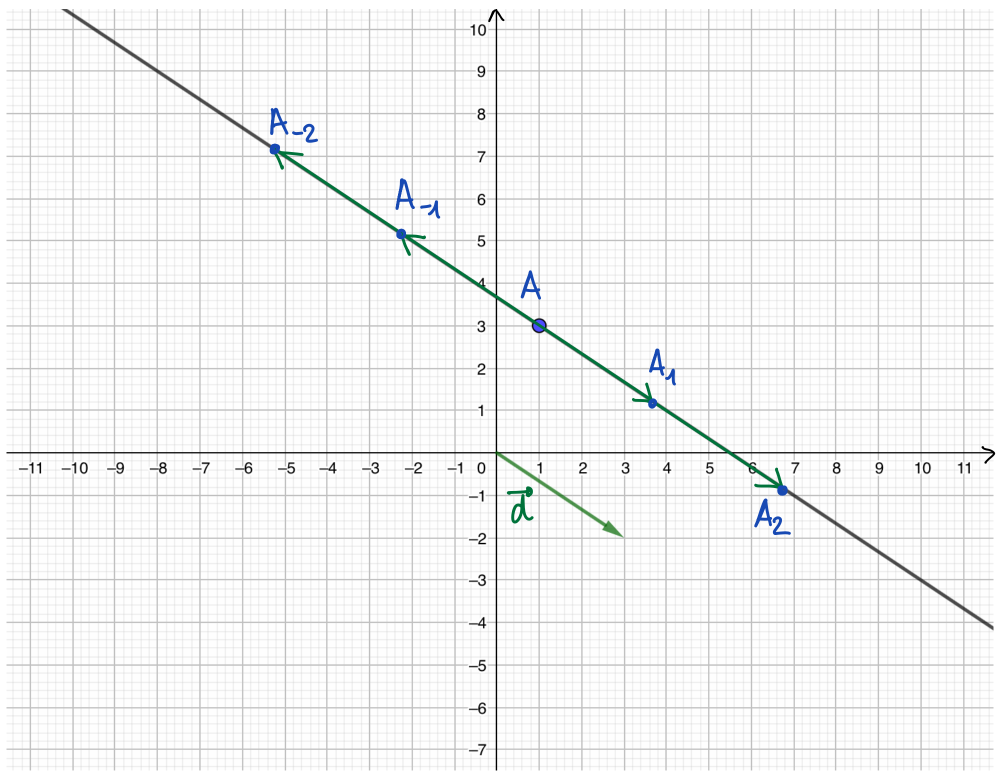
Ex 3.1.1

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$$

passant par le point $A(1;3)$

vecteur directeur $\vec{d}$



Ex 3.1.2

$$d : \begin{cases} x = 1 - 5k \\ y = 2 + 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

$(6;-1) \in d$ car $\begin{cases} 6 = 1 - 5k \\ -1 = 2 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = -5k \\ -3 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = -1 \end{cases} > = ✓$

$(3;-2) \notin d$ car $\begin{cases} 3 = 1 - 5k \\ -2 = 2 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -5k \\ -4 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2/5 \\ k = -4/3 \end{cases} > \neq$

$(1;0) \notin d$ car $\begin{cases} 1 = 1 - 5k \\ 0 = 2 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -5k \\ -2 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = -2/3 \end{cases} > \neq$

$(-6;\frac{31}{5}) \in d$ car $\begin{cases} -6 = 1 - 5k \\ \frac{31}{5} = 2 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 = -5k \\ \frac{21}{5} = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 7/5 \\ k = \frac{21}{15} = \frac{7}{5} \end{cases} > = ✓$

Ex 3.1.3

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 2 - k & 1^e \\ y = 5 + 2k & 2^e \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

a) situé sur Ox : $(x;0) \Rightarrow y = 0 \xRightarrow{\text{dans la } 2^e \text{ équa.}} 0 = 5 + 2k \iff k = -\frac{5}{2}$

dans la 1^e équ.

$\Rightarrow x = 2 - \left(-\frac{5}{2}\right) = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow A\left(\frac{9}{2};0\right)$

b) situé sur Oy : $(0;y) \Rightarrow x = 0 \xRightarrow{1^e} 0 = 2 - k \iff k = 2$

$\xRightarrow{2^e} y = 5 + 2 \cdot 2 = 9 \Rightarrow B(0;9)$

c) abscisse $= 7 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow 7 = 2 - k \iff k = -5$

$\Rightarrow y = 5 + 2 \cdot (-5) = -5 \Rightarrow C(7;-5)$

d) ordonnée $= -2 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow -2 = 5 + 2k \iff -7 = 2k \iff k = -\frac{7}{2}$

$\Rightarrow x = 2 - \left(-\frac{7}{2}\right) = 2 + \frac{7}{2} = \frac{11}{2} \Rightarrow D\left(\frac{11}{2};-2\right)$

e) deux coordonnées égales : $x = y$

on peut égaler les équa. : $2 - k = 5 + 2k \iff -3k = 3 \iff k = -1$

et remplacer dans 1 des 2 équations : $x = 2 - (-1) = 3 = y$

$\Rightarrow E(3;3)$

f) situé sur la droite $\begin{cases} x = 1 + \ell \\ y = -5 - 8\ell \end{cases}, \ell \in \mathbb{R}$

à l'intersection de deux droites : les x sont égaux et les y aussi

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 - k = 1 + \ell \\ 5 + 2k = -5 - 8\ell \end{cases} \iff \begin{cases} k + \ell = 1 \\ 2k + 8\ell = -10 \end{cases} \left| \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} -2k - 2\ell = -2 \\ + \quad 2k + 8\ell = -10 \\ \hline 6\ell = -12 \\ \ell = -2 \end{array}$$

En remplaçant ℓ par -2 dans les équations paramétriques de la 2e drte, on obtient

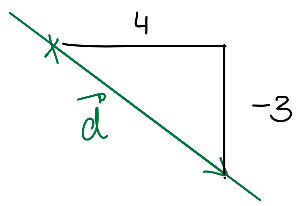
$$\begin{cases} x = 1 - 2 = -1 \\ y = -5 + 16 = 11 \end{cases} \Rightarrow \underline{F(-1\,;11)}$$

Ex 3.1.4

a) $A(3;5)$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\underline{d: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{R}}$

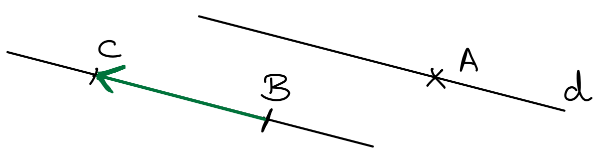
b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 - (-3) \\ -5 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur $\Rightarrow$ $\underline{d: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}}$

c) $m = -\dfrac{3}{4} \Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$



$\Rightarrow$ $\underline{d: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{R}}$

d) $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -3 - 1 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur



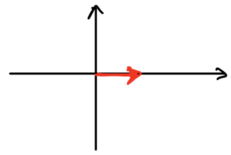
$\Rightarrow$ $\underline{d: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{R}}$

e) $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ est un vecteur perpendiculaire au vecteur $\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}$

car $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix} = -40 + 40 = 0$. Donc $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

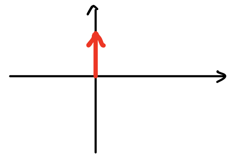
$$\Rightarrow \underline{d: \begin{cases} x = -7 + 5k \\ y = 10 + 8k \end{cases},\ k \in \mathbb{R}}$$

f) Un droite horizontale a comme vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



$$\Rightarrow \quad d : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = k \\ y = -2 \end{cases}, \; k \in \mathbb{R}$$

g) Une droite verticale a comme vecteur directeur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



$$\Rightarrow \quad d : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 8 \\ y = 12 + k \end{cases}, \; k \in \mathbb{R}$$

Ex 3.1.5

$$d : 3x - 8y + 2 = 0$$

a) $\left(0;\frac{1}{4}\right) \in d$ car $3\cdot 0 - 8\cdot\frac{1}{4} + 2 = 0 - 2 + 2 = 0$ ✓

b) $\left(-\frac{2}{3};0\right) \in d$ car $3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) - 8\cdot 0 + 2 = -2 - 0 + 2 = 0$ ✓

c) $(5;-1) \notin d$ car $3\cdot 5 - 8\cdot(-1) + 2 = 15 + 8 + 2 = 25 \neq 0$

d) $(2;1) \in d$ car $3\cdot 2 - 8\cdot 1 + 2 = 6 - 8 + 2 = 0$ ✓

Ex 3.1.6

$$d : -3x + 2y - 6 = 0$$

a) abscisse $= 3 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow -3\cdot 3 + 2y - 6 = 0$

$2y - 15 = 0$

$y = \frac{15}{2} \Rightarrow A\left(3;\frac{15}{2}\right)$

b) ordonnée $= -4 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow -3x + 2\cdot(-4) - 6 = 0$

$-3x - 14 = 0$

$x = -\frac{14}{3} \Rightarrow B\left(-\frac{14}{3};-4\right)$

c) deux coordonnées égales : $x = y$

$\Rightarrow -3x + 2x - 6 = 0$

$-x - 6 = 0$

$x = -6 \Rightarrow C(-6;-6)$

d) sur Ox : $y = 0 \Rightarrow -3x + 2\cdot 0 - 6 = 0$

$$-3x - 6 = 0$$

$$x = -2 \Rightarrow \underline{D(-2;0)}$$

e) sur Oy : $x = 0 \Rightarrow -3\cdot 0 + 2y - 6 = 0$

$$2y - 6 = 0$$

$$y = 3 \Rightarrow \underline{E(0;3)}$$

f) situé sur $5x - 7y + 4 = 0$.

On cherche le point d'intersection de ces deux droites en résolvant le système formé des deux équations :

$$\begin{cases} -3x + 2y - 6 = 0 \\ 5x - 7y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y = 6 \\ 5x - 7y = -4 \end{cases} \begin{array}{|l} \cdot 7 \\ \cdot 2 \end{array} \begin{array}{|l} \cdot 5 \\ \cdot 3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad + \begin{array}{rcl} -21x + 14y &=& 42 \\ 10x - 14y &=& -8 \\ \hline -11x &=& 34 \\ x &=& -\frac{34}{11} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad + \begin{array}{rcl} -15x + 10y &=& 30 \\ 15x - 21y &=& -12 \\ \hline -11y &=& 18 \\ y &=& -\frac{18}{11} \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{F\left(-\frac{34}{11}; -\frac{18}{11}\right)}$$

Ex 3.1.7

a) $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1$ et $b = 4 \Rightarrow x + 4y + c = 0$
$A(3;5) \in d \Rightarrow 3 + 4 \cdot 5 + c = 0 \Leftrightarrow c = -23$
$\Rightarrow d: \ x + 4y - 23 = 0$

b) $\vec{d} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow a = -3$ et $b = -7 \Rightarrow -3x - 7y + c = 0$
$A(-3;-2) \in d \Rightarrow 9 + 14 + c = 0 \Leftrightarrow c = -23$
$d: -3x - 7y - 23 = 0$
$\Leftrightarrow \ 3x + 7y + 23 = 0$

c) $m = -\dfrac{3}{4} \Rightarrow a = 3$ et $b = 4 \Rightarrow 3x + 4y + c = 0$
$A(2;-4) \in d \Rightarrow 6 - 16 + c = 0 \Leftrightarrow c = 10$
$\Rightarrow d: 3x + 4y + 10 = 0$

d) $\vec{d} = \vec{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1$ et $b = 4 \Rightarrow x + 4y + c = 0$
$A(5;2) \in d \Rightarrow 5 + 8 + c = 0 \Leftrightarrow c = -13$
$\Rightarrow d: x + 4y - 13 = 0$

e) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 8$ et $b = -5 \Rightarrow 8x - 5y + c = 0$
$A(-7;10) \Rightarrow -56 - 50 + c = 0 \Leftrightarrow c = 106$
$\Rightarrow d: 8x - 5y + 106 = 0$

f) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 0$ et $b = -1 \Rightarrow -y + c = 0$
$A(0;-2) \in d$: $2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -2$
$\Rightarrow d: \ -y - 2 = 0$
$\Leftrightarrow \ y + 2 = 0$

g) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1$ et $b = 0 \Rightarrow x + c = 0$
$A(8;12) \in d$: $8 + c = 0 \Leftrightarrow c = -8$
$\Rightarrow d: \ x - 8 = 0$

Autre méthode :

a) $\left\{ \begin{array}{l} x = 3 - 4k \\ y = 5 + \ k \end{array} \right. \begin{array}{|l} \cdot 1 \\ \cdot 4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x & = & 3 - 4k \\ 4y & = & 20 + 4k \\ \hline x + 4y & = & 23 \end{array} \Rightarrow x + 4y - 23 = 0$

b) $\left\{\begin{array}{l} x=-3+7k \\ y=-2-3k \end{array}\right. \begin{array}{|l} \cdot 3 \\ \cdot 7 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 3x & = & -\ 9+21k \\ 7y & = & -14-21k \\ \hline 3x+7y & = & -23 \end{array} \Rightarrow \quad 3x+7y+23=0$

c) $\left\{\begin{array}{l} x=\ \ 2+4k \\ y=-4-3k \end{array}\right. \begin{array}{|l} \cdot 3 \\ \cdot 4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 3x & = & 6+12k \\ 4y & = & -16-12k \\ \hline 3x+4y & = & -10 \end{array} \Rightarrow \quad 3x+4y+10=0$

d) $\left\{\begin{array}{l} x=5-4k \\ y=2+\ \ k \end{array}\right. \begin{array}{|l} \cdot 1 \\ \cdot 4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x & = & 5-4k \\ 4y & = & 8+4k \\ \hline x+4y & = & 13 \end{array} \Rightarrow \quad x+4y-13=0$

e) $\left\{\begin{array}{l} x=-\ \ 7+5k \\ y=\ \ 10+8k \end{array}\right. \begin{array}{|l} \cdot 8 \\ \cdot (-5) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 8x & = & -\ 56+40k \\ -5y & = & -\ 50-40k \\ \hline 8x-5y & = & -106 \end{array} \Rightarrow \quad 8x-5y+106=0$

f) $y=-2 \quad \Rightarrow \quad y+2=0$

g) $x=8 \quad \Rightarrow \quad x-8=0$

Ex 3.1.8

$A(3;-2) \quad B(-3;2) \quad C(0;-1)$

m_A : passe par A et par $M_{BC}\left(\frac{-3+0}{2};\frac{2-1}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM_{BC}}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}-3 \\ \frac{1}{2}+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -9 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{d}_{m_A}=\begin{pmatrix} -9 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow m_A : 5x+9y+c=0 \\ A\in m_A : 15-18+c=0 \\ \qquad\qquad c=3 \end{array}\right\} \Rightarrow m_A : 5x+9y+3=0$

m_C : passe par C et par $M_{AB}\left(\frac{3-3}{2};\frac{-2+2}{2}\right)=(0;0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{CM_{AB}}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ drte verticale passant par $C(0;-1)$

$\Rightarrow m_C : x=0$

m_B : passe par B et par $M_{AC}\left(\frac{3}{2} ; -\frac{3}{2}\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM_{AC}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}+3 \\ -\frac{3}{2}-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{d}_{m_B} = \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow m_B : 7x+9y+c=0 \\ B \in m_B \Rightarrow -21+18+c=0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c=3 \end{array}\right\} \Rightarrow m_B : 7x+9y+3=0$$

$$G\left(\frac{3-3+0}{3} ; \frac{-2+2-1}{3}\right) = G\left(0 ; -\frac{1}{3}\right)$$

Ex 3.1.9

a) $2x-3y+6=0 \Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x+2$

b) $5x+3y-15=0 \Leftrightarrow y=-\frac{5}{3}x+5$

c) $7x+3y=0$

$\Leftrightarrow y=-\frac{7}{3}x$

d) $2x+5=0 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}$

e) $-3y+9=0 \Leftrightarrow y=3$

f) $2x=0 \Leftrightarrow x=0$

g) $-5y=0 \Leftrightarrow y=0$

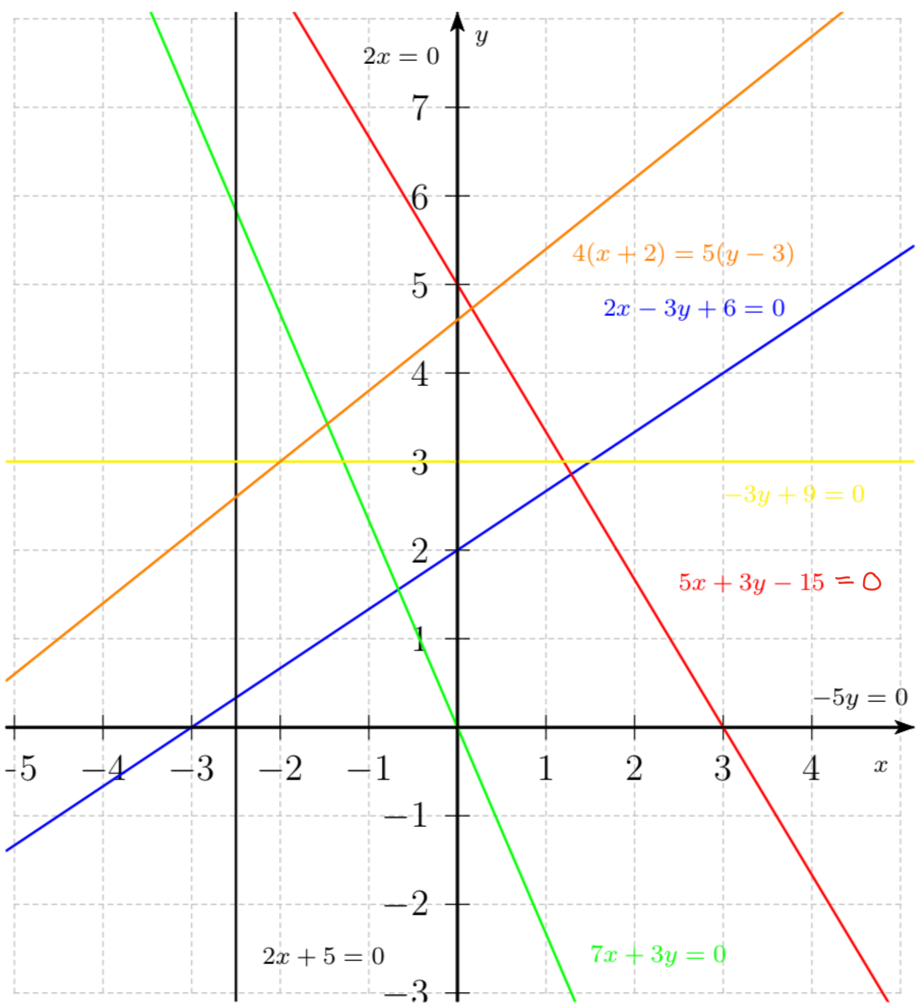
h) $4(x+2)=5(y-3)$

$\Leftrightarrow 4x-5y-23=0$

$\Leftrightarrow y=\frac{4}{5}x-\frac{23}{5}$

par tâtonnement passe par : $4x-5y=23$
$4\cdot 7-5\cdot 1=23$

$\Rightarrow (7;1)$



Ex 3.1.10

$$5x+7y-21=0 \iff y=-\frac{5}{7}x+3 \implies m=-\frac{5}{7}$$

variantes : $\vec{d}=\begin{pmatrix}-7\\5\end{pmatrix} \implies m=\frac{d_2}{d_1}=-\frac{5}{7}$

ou $m=-\frac{a}{b}=-\frac{5}{7}$

Ex 3.1.11

$$5x-8y+56=0 \iff y=\frac{5}{8}x+7 \implies h=7$$

Ex 3.1.12

a) $5x-6y-7=0$ $\quad \vec{d}=\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$ $\quad m=\frac{5}{6}$

b) $x+y-5=0$ $\quad \vec{d}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ $\quad m=-1$

c) $4x-3y=0$ $\quad \vec{d}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ $\quad m=\frac{4}{3}$

d) $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+\sqrt{15}=0$ $\quad \vec{d}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\quad m=1$

e) $\sqrt{5}x-4y-5=0$ $\quad \vec{d}=\begin{pmatrix}4\\\sqrt{5}\end{pmatrix}$ $\quad m=\frac{\sqrt{5}}{4}$

f) $3y-8=0$ $\quad \vec{d}=\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\quad m=0$ (dte horizontale)

g) $x=0$ $\quad \vec{d}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\quad m=\infty$ (dte verticale)

h) $\frac{x+2}{5}=\frac{y-3}{4} \iff 4x+8=5y-15 \iff 4x-5y+23=0$

$\vec{d}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$ $\quad m=\frac{4}{5}$

Ex 3.1.13

a) $3x+2y-11=0$

b) $6x+4y=22 \Leftrightarrow 3x+2y=11 \Leftrightarrow 3x+2y-11=0$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l|l} x = 3+2k & 3 \\ y = 1-3k & 2 \end{array}\right. \Rightarrow 3x+2y=11 \Leftrightarrow 3x+2y-11=0$

d) $\left\{\begin{array}{l|l} x = 5-2l & 3 \\ y = -2+3l & 2 \end{array}\right. \Rightarrow 3x+2y=11 \Leftrightarrow 3x+2y-11=0$

e) $y=-\frac{3}{2}x+\frac{11}{2} \Leftrightarrow 2y=-3x+11 \Leftrightarrow 3x+2y-11=0$

f) $\frac{x-9}{-2} = \frac{y+8}{3} \Leftrightarrow 3(x-9)=-2(y+8) \Leftrightarrow 3x+2y-11=0$

les équations sont toutes équivalentes, il s'agit bien de la m droite.

Ex 3.1.14

a) $d: 7x-6y=7 \Leftrightarrow 7x-6y-7=0$

On cherche une droite d': $ax+by+c=0$ avec la même pente ou le même vecteur directeur $\Rightarrow a=7$ et $b=-6$

$d': 7x-6y+c=0$

$A(1;1) \in d' \Rightarrow 7-6+c=0 \Leftrightarrow c=-1$

$d': 7x-6y-1=0$

b) $d: 5x=5-2y \Leftrightarrow 5x+2y-5=0$

$\Rightarrow d': 5x+2y+c=0$

$A(-2;-1) \in d'$: $-10-2+c=0 \Leftrightarrow c=12$

$d': 5x+2y+12=0$

c) $d: y=9-7x \Leftrightarrow 7x+y-9=0$

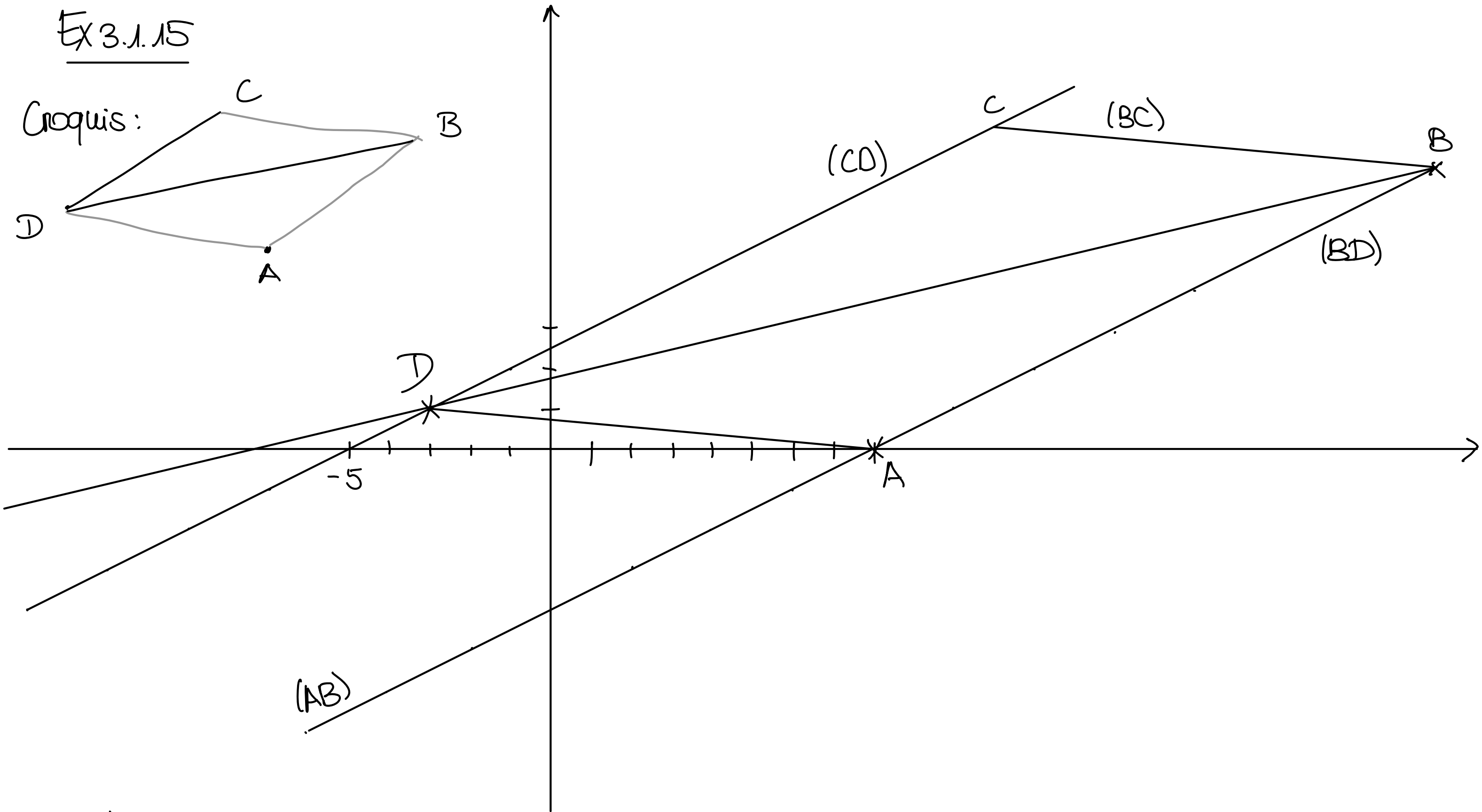
$\Rightarrow d': 7x+y+c=0$

$A(2;-2) \in d' \Rightarrow 14-2+c=0 \Leftrightarrow c=-12$

$d': 7x+y-12=0$

Ex 3.1.15

Croquis :



(CD) : $x-2y+5=0 \qquad m=\frac{1}{2}$

si $y=0 \Rightarrow x+5=0$

$\Leftrightarrow x=-5$

(BD) : $6x-25y+43=0 \qquad m=\frac{6}{25}$

passe par D (voir ci-dessous)

1) $D=(CD)\cap(BD)$: $\begin{cases} x-2y=-5 & \cdot 25 \\ 6x-25y=-43 & \cdot(-2) \end{cases} \Rightarrow + \begin{array}{rcl} 25x-50y &=& -125 \\ -12x+50y &=& 86 \\ \hline 13x &=& -39 \\ x &=& -3 \end{array}$

(1e)

$\Rightarrow -3-2y=-5 \Leftrightarrow -2y=-2 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow D(-3;1)$

2) (AB) est // à $(CD) \Rightarrow x-2y+c=0$

$A(8;0)\in(AB)$: $8-0+c=0 \Leftrightarrow c=-8$

$\Rightarrow$ (AB) : $x-2y-8=0$

3) (AD) a comme vecteur directeur $\vec{AD}=\begin{pmatrix}-3-8\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11\\1\end{pmatrix} \Rightarrow a=1$ et $b=11$

$\Rightarrow$ (AD) : $x+11y+c=0$

$A(8;0)\in(AD)$: $8+c=0 \Leftrightarrow c=-8$

$\Rightarrow$ (AD) : $x+11y-8=0$

4) $B = (AB) \cap (BD)$: $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ 6x - 25y = -43 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 25 \\ \cdot(-2) \end{vmatrix} \Rightarrow + \begin{array}{rcl} 25x - 50y & = & 200 \\ -12x + 50y & = & 86 \\ \hline 13x & = & 286 \\ x & = & 22 \end{array}$

$\overset{(1^e)}{\Rightarrow} \quad 22 - 2y = 8 \iff -2y = -14 \iff y = 7 \Rightarrow B(22;7)$

5) $\left.\begin{array}{l} (BC) \parallel (AD) \Rightarrow x + 11y + c = 0 \\ B(22;7) \in (AD): \quad 22 + 77 + c = 0 \iff c = -99 \end{array}\right\} \Rightarrow (BC): x + 11y - 99 = 0$

Ex 3.1.16

a) $d_1 \parallel Ox$ passant par $A(2;2)$: $d_1 : y = 2$

b) $d_2 \parallel Oy$ " " $B(6;-4)$: $d_2 : x = 6$

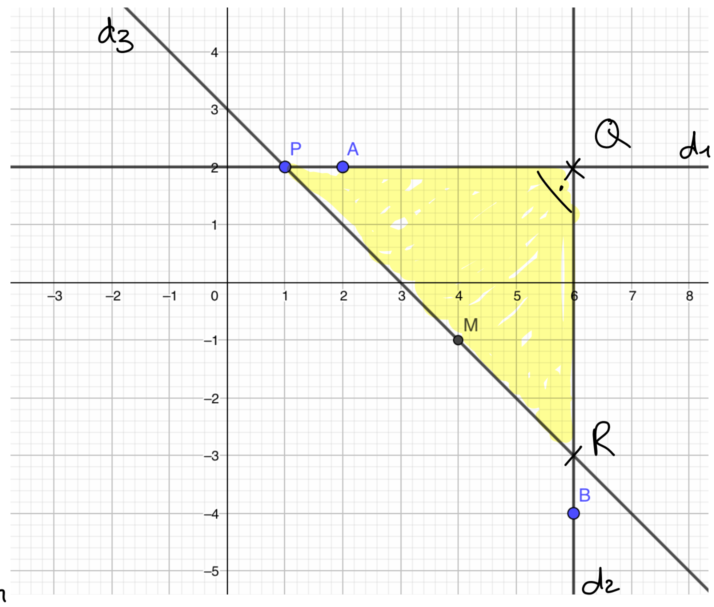
c) M milieu de AB : $M\left(\frac{2+6}{2} ; \frac{2-4}{2}\right) = M(4;-1)$

d_3 passe par $P(1;2)$ et M : $\overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \quad a = 1 \text{ et } b = 1 \quad \Rightarrow \quad d_3 : x + y + c = 0 \\ P \in d_3 : 1 + 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow d_3 : x + y - 3 = 0$

d) $P = d_1 \cap d_3$ car $P(1;2) \in d_1$

$y = 2$



$Q = d_1 \cap d_2 \Rightarrow Q(6;2)$

$d_2 : x = 6$ $\quad d_1 : y = 2$

$R = d_2 \cap d_3$: $\begin{cases} x = 6 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow 6 + y = 3$

$\Rightarrow y = 3 - 6 = -3 \Rightarrow R(6;-3)$

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{25+0} = 5$

$\overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix} 6-6 \\ 2-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{RQ}\| = 5$

$\Rightarrow$ aire $= \frac{5 \cdot 5}{2} = 12{,}5\ u^2$ (car Δ rectangle)

ou avec formule aire $= \frac{1}{2} \left| 5 \cdot 5 - 0 \cdot 0 \right| = 12{,}5\ u^2$

(formulaire p.48)

Ex 3.1.17 $\quad A(2;-3)$

a) $d:\ 3x-7y+3=0$

$$\left.\begin{aligned} p\perp d &\Rightarrow 7x+3y+k=0 \\ A\in p &\Rightarrow 14-9+k=0 \Leftrightarrow k=-5 \end{aligned}\right\} \quad p:\ 7x+3y-5=0$$

b) $d:\ x+9y=11$ et $A(2;-3)$

$$\left.\begin{aligned} p\perp d &\Rightarrow 9x-y+k=0 \\ A\in p &\Rightarrow 18+3+k=0 \Leftrightarrow k=-21 \end{aligned}\right\} \Rightarrow p:\ 9x-y-21=0$$

c) $d:\ 16x=24y-7 \Leftrightarrow 16x-24y+7=0$

$$\left.\begin{aligned} p\perp d &\Rightarrow 24x+16y+k=0 \\ A\in p &\Rightarrow 48-48+k=0 \Leftrightarrow k=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow p:\ 16x-24y=0$$

$$2x-3y=0$$

d) $d:\ 2x+3=0$ drte verticale : $x=-\frac{3}{2}$

$p\perp d \Rightarrow y=k$

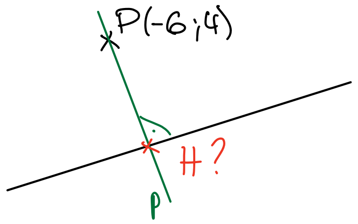
$A\in p \Rightarrow y=-3 \Rightarrow p:\ y+3=0$

e) $d:\ 3y=1$ drte horizontale : $y=\frac{1}{3}$

$p\perp d \Rightarrow x=k$

$A\in p \Rightarrow x=2 \Rightarrow p:\ x-2=0$

Ex 3.1.18



- $p \perp d \Rightarrow p: 5x+4y+c=0$

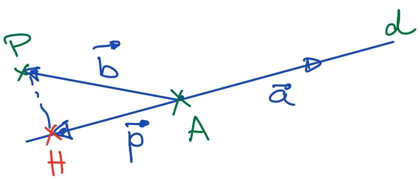
  $P \in p \Rightarrow -30+16+c=0 \Leftrightarrow c=14 \Rightarrow p: 5x+4y+14=0$

- $H = p \cap d$: $\begin{cases} 4x-5y=-3 \\ 5x+4y=-14 \end{cases} \begin{vmatrix} 4 \\ 5 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-5y=-3 \\ 41x=-82 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

  $\Rightarrow H(-2;-1)$

Variante : avec formule : projection orthogonale $\vec{p}$ de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$

$$\vec{p} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}\cdot\vec{a}$$



Ici $\vec{a} = \vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \vec{AP}$

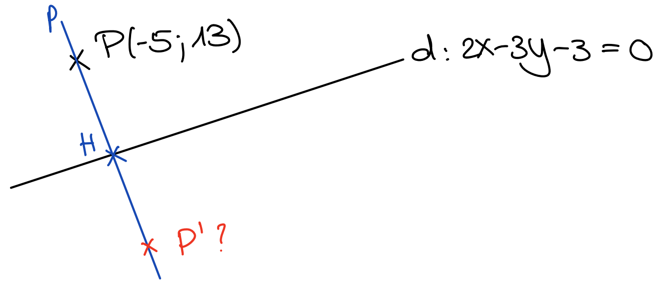
Il faut trouver un pt $A \in d$: $A(3;3)$ car $4\cdot3-5\cdot3+3=0$

$\Rightarrow \vec{b} = \vec{AP} = \begin{pmatrix} -6-3 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{p} = \frac{5\cdot(-9)+4\cdot1}{25+16}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{-41}{41}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{OH} = \vec{OA} + \underbrace{\vec{AH}}_{\vec{p}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow H(-2;-1)$

Ex 3.1.19



- $p \perp d \Rightarrow 3x+2y+c=0$

  $P \in p \Rightarrow -15+26+c=0 \Leftrightarrow c=-11$

  $\Rightarrow p: 3x+2y-11=0$

- $H = p \cap d: \begin{cases} 2x-3y=3 \\ 3x+2y=11 \end{cases} \left| \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=3 \\ 13x=39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 6-3y=3 \Leftrightarrow y=1 \end{cases}$

  $\Rightarrow H(3;1)$

- $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OH} + \underbrace{\overrightarrow{HP'}}_{=\overrightarrow{PH}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3+5 \\ 1-13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -11 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(11;-11)$

variante : H milieu de PP' $\Rightarrow \left(\frac{-5+x}{2} ; \frac{13+y}{2}\right) = (3;1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -5+x=6 \Leftrightarrow x=11 \\ 13+y=2 \Leftrightarrow y=-11 \end{cases}$

Ex 3.1.20

$A(2;1) \quad B(-1;-1) \quad C(3;2)$

$h_A: \perp (BC) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{n}_{h_A}$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow h_A: 4x+3y+c=0 \\ A \in h_A \Rightarrow 8+3+c=0 \\ \qquad c=-11 \end{array}\right\} \Rightarrow h_A: 4x+3y-11=0$

h_C : $\perp (AB) \Rightarrow \vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{n}_{h_C}$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow h_C : -3x - 2y + c = 0 \\ &C \in h_C \Rightarrow -9 - 4 + c = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad c = 13 \end{aligned}\right\} \Rightarrow h_C : -3x - 2y + 13 = 0$$

h_B : $\perp (AC) \Rightarrow \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}_{h_B}$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow h_B : x + y + c = 0 \\ &B \in h_B \Rightarrow -1 - 1 + c = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad c = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow h_B : x + y + 2 = 0$$

$H = h_A \cap h_C$: $\begin{cases} 4x + 3y = 11 \\ -3x - 2y = -13 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} 8x + 6y = 22 \\ -9x - 6y = -39 \\ \hline -x \quad = -17 \\ x \quad = 17 \end{array}$

$$\Rightarrow 4 \cdot 17 + 3y = 11$$
$$78 + 3y = 11$$
$$y = -19 \Rightarrow H(17 ; -19)$$

Ex 3.1.21

$A(2 ; -3) \quad B(-5 ; -2)$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -5-2 \\ -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}_{m_{AB}}$ car $AB \perp m_{AB}$ $\Rightarrow m_{AB} : -7x + y + c = 0$

M milieu de AB : $M\left(\frac{2-5}{2} ; \frac{-3-2}{2}\right) = M\left(-\frac{3}{2} ; \frac{-5}{2}\right)$

$M \in m_{AB} \Rightarrow +7 \cdot \frac{3}{2} - \frac{5}{2} + c = 0 \Leftrightarrow 8 + c = 0 \Leftrightarrow c = -8$

$\Rightarrow m_{AB} : -7x + y - 8 = 0$

Ex 3.1.22

$A(1;8) \quad B(3;4) \quad C(-6;1)$

$m_{AB} : \perp (AB) \Rightarrow \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_{m_{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow m_{AB} : x - 2y + c = 0 \\ M_{AB}\left(\frac{1+3}{2} ; \frac{8+4}{2}\right) = M_{AB}(2;6) \in m_{AB} \Rightarrow 2 - 12 + c = 0 \\ \qquad c = 10 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow m_{AB} : x - 2y + 10 = 0$

$m_{BC} : \perp (BC) \Rightarrow \vec{BC} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_{m_{BC}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow m_{BC} : 3x + y + c = 0 \\ M_{BC}\left(-\frac{3}{2} ; \frac{5}{2}\right) \in m_{BC} \Rightarrow -\frac{9}{2} + \frac{5}{2} + c = 0 \\ \qquad c = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow m_{BC} : 3x + y + 2 = 0$$

$m_{AC} : \perp (AC) \Rightarrow \vec{AC} = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix} = -7\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_{m_{AC}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow m_{AC} : x + y + c = 0 \\ M_{AC}\left(-\frac{5}{2} ; \frac{9}{2}\right) \in m_{AC} \Rightarrow -\frac{5}{2} + \frac{9}{2} + c = 0 \\ \qquad c = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow m_{AC} : x + y - 2 = 0$$

$$K = m_{AB} \cap m_{BC} : \begin{cases} x - 2y = -10 & \mid 1 \\ 3x + y = -2 & \mid 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rl} x - 2y &= -10 \\ 6x + 2y &= -4 \\ \hline 7x &= -14 \\ x &= -2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rl} 3\cdot(-2) + y &= -2 \\ -6 + y &= -2 \\ y &= 4 \end{array} \Rightarrow K(-2;4)$$

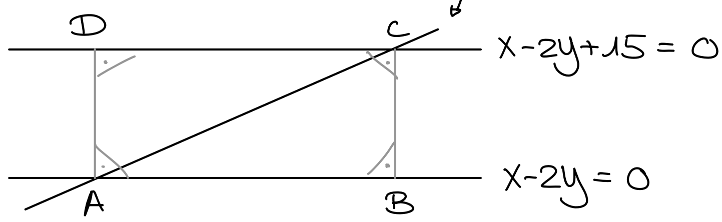
$r = \|\vec{AK}\| = \left\|\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{9+16} = 5\,u$

Ex 3.1.23

$$\left.\begin{array}{l} x = 2y \iff x-2y=0 \\ 2y - x = 15 \iff x-2y+15=0 \end{array}\right\} \text{ drtes } // \Rightarrow \text{ côtés}$$

$$7x+y-15=0 \quad \Rightarrow \text{ diagonale } (AC)$$

croquis :



1) $A = (AB) \cap (AC)$: $\begin{cases} x-2y=0 \\ 7x+y=15 \end{cases} \begin{array}{|l} 1 \\ 2 \end{array}$ $\Rightarrow$ $\begin{array}{rl} x-2y &= 0 \\ 14x+2y &= 30 \\ \hline 15x &= 30 \\ x &= 2 \end{array}$

$\Rightarrow 7 \cdot 2 + y = 15$

$y = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{A(2;1)}$

2) $\{C\} = (DC) \cap (AC)$: $\begin{cases} x-2y=-15 \\ 7x+y=15 \end{cases} \begin{array}{|l} 1 \\ 2 \end{array}$ $\Rightarrow$ $\begin{array}{rl} x-2y &= -15 \\ 14x+2y &= 30 \\ \hline 15x &= 15 \\ x &= 1 \end{array}$

$\Rightarrow 7+y=15$

$y = 8 \quad \Rightarrow \quad \underline{C(1;8)}$

3) $\left.\begin{array}{l} (AD) \perp (AB) \Rightarrow (AD) : \; 2x+y+c=0 \\ A \in (AD) \Rightarrow 4+1+c=0 \\ \qquad\qquad\qquad c = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow (AD) : \; 2x+y-5=0$

$\{D\} = (AD) \cap (DC)$: $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-2y=-15 \end{cases} \begin{array}{|l} 2 \\ 1 \end{array}$ $\Rightarrow$ $\begin{array}{rl} 4x+2y &= 10 \\ x-2y &= -15 \\ \hline 5x &= -5 \\ x &= -1 \end{array}$

$\Rightarrow -2+y=5$

$y = 7 \quad \Rightarrow \quad \underline{D(-1;7)}$

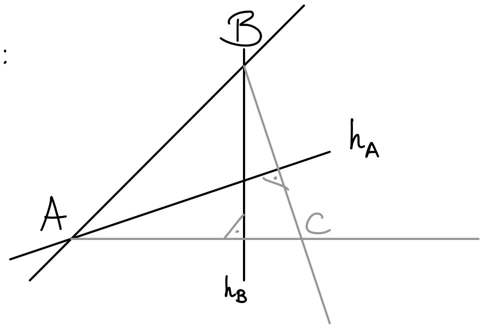
4) $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OA} + \vec{DC}$ ($\vec{AB} = \vec{DC}$ car ABCD est un //-gramme)

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+1 \\ 8-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B(4;2)$$

Ex 3.1.24

$(AB): 5x-3y+2=0 \qquad h_A : 4x-3y+1=0 \qquad h_B : 7x+2y-22=0$

croquis :



1) $\{A\} = (AB) \cap h_A$: $\begin{cases} 5x-3y=-2 & \vert\ 1 \\ 4x-3y=-1 & \vert\ (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} 5x-3y=-2 \\ -4x+3y=1 \\ \hline x \qquad =-1 \end{array}$

$$\Rightarrow \quad -5-3y=-2$$
$$-3y = 3$$
$$y=-1 \qquad \Rightarrow \quad A(-1;-1)$$

$(AC) \perp h_B \Rightarrow 2x-7y+k=0$

$A \in (AC) \Rightarrow 2\cdot(-1)-7(-1)+k=0 \Leftrightarrow -2+7+k=0$

$\Leftrightarrow k=-5$

$\Rightarrow (AC): 2x-7y-5=0$

2) $\{B\} = (AB) \cap h_B$: $\begin{cases} 5x - 3y = -2 \\ 7x + 2y = 22 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ $\Rightarrow$ $\begin{aligned} 10x - 6y &= -4 \\ 21x + 6y &= 66 \\ \hline 31x &= 62 \\ x &= 2 \end{aligned}$

$\Rightarrow$ $10 - 3y = -2$
$-3y = -12$
$y = 4$ $\Rightarrow$ $B(2;4)$

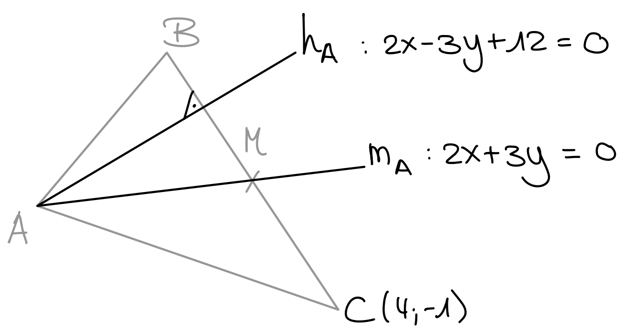
$(BC) \perp h_A \Rightarrow (BC): 3x + 4y + c = 0$
$B \in (BC) \Rightarrow 6 + 16 + c = 0$
$c = -22$
$\Rightarrow (BC): 3x + 4y - 22 = 0$

3) $\{C\} = (BC) \cap (AC)$: $\begin{cases} 3x + 4y = 22 \\ 2x - 7y = 5 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 7 \\ \cdot 4 \end{vmatrix}$ $\Rightarrow +$ $\begin{aligned} 21x + 28y &= 154 \\ 8x - 28y &= 20 \\ \hline 29x &= 174 \\ x &= 6 \end{aligned}$

$\Rightarrow$ $18 + 4y = 22$
$4y = 4$
$y = 1$ $\Rightarrow$ $C(6;1)$

Ex 3.1.25

croquis :



1) $(BC) \perp h_A \Rightarrow (BC): 3x + 2y + c = 0$
$C \in (BC) \Rightarrow 12 - 2 + c = 0$
$c = -10$
$\Rightarrow (BC): 3x + 2y - 10 = 0$

2) $\{A\} = h_A \cap m_A : \left\{\begin{array}{l} 2x-3y = -12 \\ 2x+3y = 0 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array}\right.$

$4x = -12$

$x = -3 \Rightarrow -6+3y = 0$

$y = 2 \Rightarrow \underline{A(-3;2)}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \vec{d} \Rightarrow (AC) : -3x-7y+C=0$

$C \in (AC) \Rightarrow -12+7+C=0 \Leftrightarrow C=5$

$\Rightarrow \underline{(AC) : -3x-7y+5=0}$

$\Leftrightarrow \underline{3x+7y-5=0}$

3) M milieu de BC : $m_A \cap (BC) : \left\{\begin{array}{l} 2x+3y = 0 \\ 3x+2y = 10 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} -2 \\ 3 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \begin{array}{l} -4x-6y = 0 \\ 9x+6y = 30 \end{array}$

$5x = 30$

$x = 6 \Rightarrow 12+3y=0 \Leftrightarrow y=-4 \Rightarrow \underline{M(6;-4)}$

$\Rightarrow M(6;-4) = \left(\frac{b_1+4}{2} ; \frac{b_2-1}{2}\right)$ avec $B(b_1 ; b_2) \Rightarrow \underline{B(8;-7)}$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 11 \\ -9 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB) : -9x-11y+C=0$

$A \in (AB) \Rightarrow 27-22+C=0$

$C=-5$

$\Rightarrow \underline{(AB) : -9x-11y-5=0}$

$\Leftrightarrow \underline{9x+11y+5=0}$

Ex 3.1.27

a) $d_1 : 3x - 5y + 7 = 0$ $\qquad$ $d_2 : 2x - 4y - 8 = 0$

$m_1 = -\frac{3}{-5} = \frac{3}{5} \neq m_2 = -\frac{2}{-4} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ les droites sont concourantes ou sécantes

$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 5y = -7 & \cdot 4 \\ 2x - 4y = 8 & \cdot (-5) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 12x - 20y &=& -28 \\ -10x + 20y &=& -40 \\ \hline 2x &=& -68 \\ x &=& -34 \end{array}$

$\Rightarrow 2\cdot(-34) - 4y = 8$
$-4y = 76$
$y = -19$

$\Rightarrow I(-34; -19)$

b) $d_1 : -4x + 20y + 36 = 0$ $\qquad$ $d_2 : x - 5y = 9$

$\Leftrightarrow 20y = 4x - 36$ $\qquad$ $x - 9 = 5y$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{5}x - \frac{9}{5}$ $\qquad$ $y = \frac{1}{5}x - \frac{9}{5}$

$m_1 = m_2 = \frac{1}{5}$ et $h_1 = h_2 = -\frac{9}{5}$ $\Rightarrow$ les droites sont confondues (c'est la même droite !)

c) $d_1 : -7x - 8y + 2 = 0$ $\qquad$ $d_2 = 4x - 3y + 4 = 0$

$m_1 = -\frac{-7}{-8} = -\frac{7}{8} \neq m_2 = -\frac{4}{-3} = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow$ les droites sont sécantes

$\Rightarrow \begin{cases} -7x - 8y = -2 & \cdot 3 & \cdot 4 \\ 4x - 3y = -4 & \cdot (-8) & \cdot 7 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{array}{rcl} -21x - 24y &=& -6 \\ -32x + 24y &=& 32 \\ \hline -53x &=& 26 \\ x &=& -\frac{26}{53} \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{rcl} -28x - 32y &=& -8 \\ 28x - 21y &=& -28 \\ \hline -53y &=& -36 \\ y &=& \frac{36}{53} \end{array}$

$\Rightarrow I\left(-\frac{26}{53}; \frac{36}{53}\right)$

d) $d_1 : 8x - 2y + 36 = 0$ $\qquad$ $d_2 : y = 4x + 25$

$\Leftrightarrow \quad -2y = -8x - 36$

$\Leftrightarrow \quad y = 4x + 18$

$m_1 = m_2 = 4$ mais $h_1 = 18 \neq h_2 = 25$

$\Rightarrow$ les droites sont parallèles

Ex 3.1.28

a : $2x + y - 3 = 0$ $\qquad$ b : $x - 3y + 1 = 0$ $\qquad$ c : $3x + 5y - 7 = 0$ $\qquad$ d : $4x - 5y - 1 = 0$

$m_a = -2$ $\qquad$ $m_b = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $m_c = -\frac{3}{5}$ $\qquad$ $m_d = \frac{4}{5}$

Comme les pentes sont toutes différentes $\Rightarrow$ les 4 drtes sont sécantes.

a∩b : $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 3y = -1 \end{cases} \left| \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 8 \\ -7y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8/7 \\ y = 5/7 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{8}{7} ; \frac{5}{7}\right)$

Il suffit de prouver maintenant que $I \in c$ et $I \in d$:

$3 \cdot \frac{8}{7} + 5 \cdot \frac{5}{7} - 7 = \frac{49}{7} - 7 = 0$ ✓ $\Rightarrow I \in c$

$4 \cdot \frac{8}{7} - 5 \cdot \frac{5}{7} - 1 = \frac{7}{7} - 1 = 0$ ✓ $\Rightarrow I \in d$

#

Ex 3.1.29

$d_1 : (a-1)x + (3a-1)y + (4a-4) = 0$

$\Rightarrow y = -\frac{a-1}{3a-1}x - \frac{4a-4}{3a-1} \Rightarrow m_1 = -\frac{a-1}{3a-1}$ et $h_1 = -\frac{4a-4}{3a-1}$ avec $a \neq \frac{1}{3}$

$d_2 : (2a-2)x + (2a-1)y + (4a-7) = 0$

$\Rightarrow y = -\frac{2a-2}{2a-1}x - \frac{4a-7}{2a-1} \Rightarrow m_2 = -\frac{2a-2}{2a-1}$ et $h_2 = -\frac{4a-7}{2a-1}$ avec $a \neq \frac{1}{2}$

- si $a \neq \frac{1}{3}$ et $a \neq \frac{1}{2}$

a) confondues si $m_1 = m_2$ et $h_1 = h_2$

$-\frac{a-1}{3a-1} = -\frac{2a-2}{2a-1}$ et $-\frac{4a-4}{3a-1} = -\frac{4a-7}{2a-1}$

$(a-1)(2a-1) = (3a-1)(2a-2)$	$(4a-4)(2a-1) = (4a-7)(3a-1)$
$2a^2-3a+1 = 6a^2-8a+2$	$8a^2-12a+4 = 12a^2-25a+7$
$4a^2-5a+1 = 0$	$4a^2-13a+3 = 0$
$a = \frac{5\pm3}{8} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$	$a = \frac{13\pm11}{8} = \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow a = \frac{1}{4}$

b) parallèles si $m_1 = m_2 \Rightarrow a = 1$

c) perpendiculaires si $m_1 \cdot m_2 = -1$:

$+\frac{a-1}{3a-1} \cdot \left(+\frac{2a-2}{2a-1}\right) = -1 \Leftrightarrow (a-1)(2a-2) = -(3a-1)(2a-1)$

$\Leftrightarrow 2a^2-4a+2 = -6a^2+5a-1$

$\Leftrightarrow 8a^2-9a+3 = 0 \qquad \Delta = -15 < 0$

$\Rightarrow d_1 \not\perp d_2 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

- si $a = \frac{1}{3}$: d_1 est vertical mais pas d_2 $\Rightarrow$ ni confondues ni parallèles ni perp. car d_2 n'est pas horiz.
- si $a = \frac{1}{2}$: d_2 est vertical mais pas d_1 $\Rightarrow$ " " " " car d_1 n'est pas horiz.