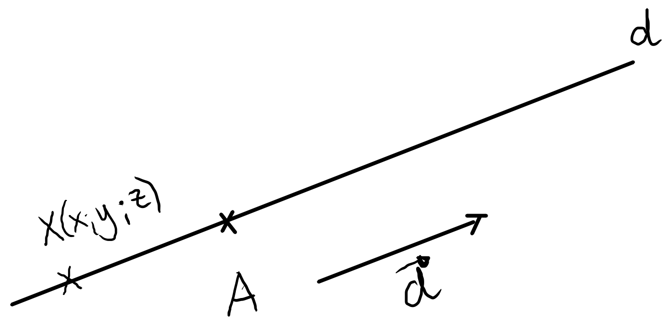
3.4 La droite dans l'espace



Soit $X(x;y;z)$ un point quelconque de d

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AX} \sim \vec{d}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AX} = k \cdot \vec{d} \qquad k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} = k \cdot \vec{d} \qquad$ "

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \vec{d} \qquad$ "

$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \qquad$ "

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = a_1 + kd_1 \\ y = \;.. \\ z = \;.... \end{cases} \qquad$ "

équa. paramétrique(s)

Exple : $A(1;2;0)$ et $B(11;-3;-5)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(AB) : \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 - k \\ z = \quad -k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$$

Position relative de 2 drtes : d et e

$d \parallel e$ (parallèles) (o pt. d'∩) $\Leftrightarrow$ $\vec{d} \sim \vec{e}$ et $D \in d$ et $D \notin e$

$d \equiv e$ (confondues) (une infinité de pt d'∩) $\Leftrightarrow$ $\vec{d} \sim \vec{e}$ et $D \in d$ et $D \in e$

d et e sont sécantes (1 pt. d'∩) $\Leftrightarrow$ $\vec{d} \nsim \vec{e}$ et d et e sont coplanaires

d et e sont gauches (o pt. d'∩) $\Leftrightarrow$ $\vec{d} \nsim \vec{e}$ et d et e ne sont pas coplanaires

Rem : $d \parallel e$ ou $d \equiv e$, d et e sont coplanaires.

Rappel : $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires

$\Leftrightarrow$ $\exists$ k et $l \in \mathbb{R}$ tq $\vec{a} = k \cdot \vec{b} + l \cdot \vec{c}$

$\Leftrightarrow$ $\det(\vec{a}; \vec{b}, \vec{c}) = 0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{?}{\cancel{\sim}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

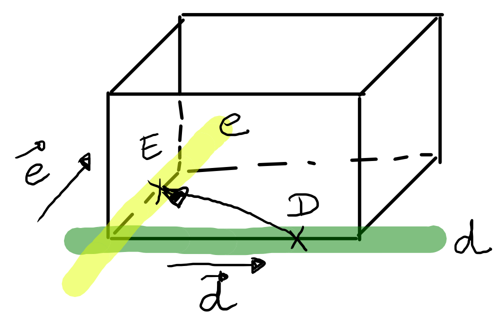
$\cancel{\exists}\ \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cancel{=} \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

il existe

d et e sont coplanaires ssi

$$\det(\vec{d} \, ; \vec{e} \, ; \vec{DE}) = 0$$

avec $D \in d$ et $E \in e$



Exple

$$d : \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 - k \\ z = 3 + 2k \end{cases} , \quad k \in \mathbb{R} \qquad e : \begin{cases} x = -2\ell \\ y = -1 + \ell \\ z = 2 + 3\ell \end{cases} , \quad \ell \in \mathbb{R}$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} \nparallel \vec{e} \text{ car } \nexists \, \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } \vec{d} = \lambda \vec{e}$$

$\Rightarrow$ sécantes ou gauches

$D(1 ; 2 ; 3)$ et $E(0 ; -1 ; 2)$ $\Rightarrow$ $\vec{DE} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 1\left(-1 - (-9)\right) + 1\left(2 - (-3)\right) + 2\left(+6 - (-1)\right) = 27 \neq 0$$

ou

$$\left|\begin{matrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ gauches

$$= -1 + 12 + 3 - (-2) - (-9) - (-2) = 27 \neq 0$$