Equation cartésienne du plan dans l'espace

Exples

1)
$$\left\{\begin{array}{l} x = 4-7k-n \\ y = 5-3k-n \\ z = 8-k+n \end{array}\right. \quad \begin{array}{|c|c} 1 & \\ & 1 \\ 1 & 1 \end{array}$$

pour éliminer n

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+z = 12-8k \\ y+z = 13-4k \end{array}\right. \begin{array}{|c} 1 \\ -2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x-2y-z = -14$$

$$\Leftrightarrow \quad x-2y-z+14 = 0$$

2) $x+y+z-3 = 0$

On pose $x=k$ et $y=n$, $k,n \in \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{l} x = k \\ y = n \\ z = 3-k-n \end{array}\right. \Rightarrow \text{plan passant par } (0;0;3)$$

$$\text{et } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Thm :
- Pour tout plan π , il existe une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d = 0$ avec a, b et c non tous nuls
- Toute équation de la forme $ax+by+cz+d=0$ " est l'équation cartésienne d'un plan.

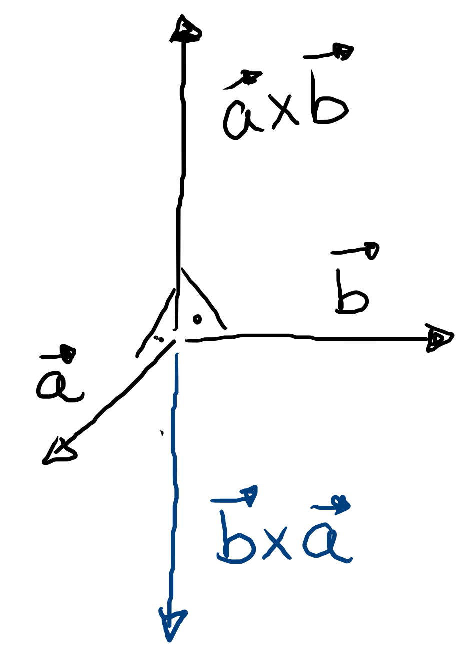
Rappel

produit vectoriel de deux vecteurs

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array}$$



Propriétés : 1) $\vec{a} \times \vec{b}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$

2) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \sim \vec{b}$

3) $\| \vec{a} \times \vec{b} \|$ = aire du //-gramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$

Thm : 1) Π passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ alors $\vec{v} \times \vec{w}$ est un vecteur normal au plan.

2) Si $\Pi : ax + by + cz + d = 0$ alors $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan.

Exple 1) Π passant par $A(4;5;8)$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-1 \\ 1+7 \\ 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$-7 \qquad -1$

$-3 \qquad -1$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \Pi : -x + 2y + z + d = 0 \\ A \in \Pi \Rightarrow -4 + 2\cdot 5 + 8 + d = 0 \Leftrightarrow d = -14 \end{array}\right\} \Rightarrow \Pi : -x + 2y + z - 14 = 0$$