Ch 1 Algèbre

1. Puissances et racines

Définition : puissance n^e de a : $\overset{\text{exposant}}{}$ $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fois}}$

base

valable si n est un nombre entier positif non nul $(n \in \mathbb{N}^*)$

Exemples et propriétés

1) $5^2 \cdot 5^4 = 5^6$

2) $(7^2)^3 = 7^6$

$7^2 \cdot 7^2 \cdot 7^2 = 7^{3 \cdot 2}$

3) $(2x)^3 = 2^3 x^3 = 8x^3$

mais : $(2+x)^3 = (2+x)(2+x)(2+x)$

prod. rem.

$= 8 + 12x + 6x^2 + x^3$

$(2+x)^2 = 4 + 4x + x^2$!! ♡

4) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

5) $\frac{x^5}{x^3} = x^2$

$$\boxed{\begin{array}{l}
a^n \cdot a^m = a^{n+m} \\
(a^n)^m = a^{n \cdot m} \\
(a \cdot b)^n = a^n b^n \\
\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \\
\left(\begin{cases} \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} & \text{si } n \geq m \\ \frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}} & \text{si } n < m \end{cases}\right)
\end{array}}$$

♡ form. p. 10

← remplacée (voir plus loin)

Rem : si a est négatif alors a^n est — positif si n est pair
— négatif si n est impair

exple : $(-3)^2 = 9$ ⚠ $-3^2 = -9$

$(-3)^3 = -27$

On aimerait étendre la définition pour $n = 0$ et n négatif.

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \qquad 2^{-1} = \frac{1}{2} \qquad 2^0 = 1 \qquad 2^1 \xrightarrow{\cdot 2} 2^2 \xrightarrow{\cdot 2} 2^3 \xrightarrow{\cdot 2} 2^4 \ \ldots$$

$$\ldots \ 2^4 \xrightarrow{\div 2} 2^3 \xrightarrow{\div 2} 2^2 \xrightarrow{\div 2} 2^1 \xrightarrow{\div 2} 2^0 \xrightarrow{\div 2} 2^{-1} \xrightarrow{\div 2} 2^{-2}$$

Déf :
$$\boxed{\begin{array}{ll} a^0 = 1 & \text{si } a \neq 0 \\ a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} & \text{si } a \neq 0 \text{ et } n \in \mathbb{Z} \end{array}}$$ ♡

Exemples et propriétés

1) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

2) $(-3)^{-2} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

3) $8 \cdot 10^{-2} = 8 \cdot \frac{1}{100} = \frac{8}{100} = 0{,}08$ (not. scientifique)

4) $\frac{1}{7^{-5}} = \frac{1}{\frac{1}{7^5}} = 7^5$

$$\boxed{\frac{1}{a^{-n}} = a^n}$$ ♡

5) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{1}{\frac{2^3}{3^3}}$

$= 1 \div \frac{2^3}{3^3} = 1 \cdot \frac{3^3}{2^3}$

$= \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}}$$ ♡

Ainsi on a $\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \ , \ a \neq 0 \quad n \text{ et } m \in \mathbb{Z}}$

Exemples

a) $2^{10} \cdot 2^{-5} \cdot 2^{-1} = 2^{10-5-1} = 2^{4}$

b) $(3x^{-2}y^{3})^{-1} = \dfrac{1}{(3x^{-2}y^{3})^{1}} = \dfrac{x^2}{3y^3}$

ou

$= 3^{-1} x^{2} y^{-3} = \dfrac{x^2}{3y^3}$

ex 1.1.1 et 1.1.2

, 1.1.3 et 1.1.5 ~~i)~~

Exemples (suite)

c) $\dfrac{3^2 \cancel{x^3} y^{-5}}{3^{-2} \cancel{x^3} y^{-6}} = 3^{2-(-2)} \cdot x^{3-3} \cdot y^{-5-(-6)}$

$= 3^4 \cdot x^0 \cdot y^1$

$= 3^4 y$

$= 81y$

d) $\left(\dfrac{x^{-2}}{2y^3}\right)^{-3} = \left(\dfrac{2y^3}{x^{-2}}\right)^{3} = (2x^2y^3)^3 = 8x^6y^9$

e) $\left(\dfrac{x-3}{x+5}\right)^{-2} = \left(\dfrac{x+5}{x-3}\right)^{2} = \dfrac{(x+5)^2}{(x-3)^2} = \dfrac{x^2+10x+25}{x^2-6x+9}$

ex 1.1.6 rép sans exp. négatif