Ex 3.3.1

a) $(x-5)^2+(y+2)^2=25$ cercle de centre $C(5;-2)$ et $r=5$

b) $(x+2)^2+y^2=64$ " " $C(-2;0)$ et $r=8$

c) $(x-5)^2+(y+2)^2=0$ c'est un point $(5;-2)$ $(r=0)$

d) $x^2+(y-5)^2=5$ cercle de centre $C(0;5)$ et $r=\sqrt{5}$

e) $x^2+y^2-2x+4y=20$

$x^2-2x+1+y^2+4y+4=20+1+4$

$(x-1)^2+(y+2)^2=25$ cercle de centre $C(1;-2)$ et $r=5$

f) $x^2+y^2-2x+4y+14=0$

$x^2-2x+1+y^2+4y+4=-14+1+4$

$(x-1)^2+(y+2)^2=-9$ ϟ nég. pas un cercle.

g) $x^2+y^2+4x-2y+5=0$

$x^2+4x+4+y^2-2y+1=-5+4+1$

$(x+2)^2+(y-1)^2=0$ c'est un point $(-2;1)$

h) $x^2+y^2+x=0$

$x^2+x+\frac{1}{4}+y^2=0+\frac{1}{4}$

$(x+\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$ cercle de centre $C(-\frac{1}{2};0)$ et $r=\frac{1}{2}$

i) $x^2+y^2+6x-4y+14=0$

$x^2+6x+9+y^2-4y+4=-14+9+4$

$(x+3)^2+(y-2)^2=-1$ ϟ (nég.) ce n'est pas un cercle

j) $x^2+y^2+y=0$

$x^2+y^2+y+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

$x^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$ cercle de centre $C(0;-\frac{1}{2})$ et $r=\frac{1}{2}$

Ex 3.3.2

a) $C(0;0)$ et $r=3$: $\underline{x^2+y^2=9}$

b) $C(2;-3)$ et $r=7$: $\underline{(x-2)^2+(y+3)^2=49}$

c) $C(6;-8)$ et passe par $O(0;0)$: $\gamma : (x-6)^2+(y+8)^2=r^2$

1e méthode : $O \in \gamma \Rightarrow (0-6)^2+(0+8)^2 = 36+64 = 100 = r^2$ $(r=10)$

$\Rightarrow \underline{\gamma : (x-6)^2+(y+8)^2 = 100}$

2e méthode : $r = \|\vec{OC}\| = \left\|\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{6^2+(-8)^2} = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow \ldots$

d) $C(-1;2)$ et passe par $A(2;6)$: $\gamma : (x+1)^2+(y-2)^2=r^2$

1e méthode : $A \in \gamma \Rightarrow (2+1)^2+(6-2)^2 = 9+16 = 25 = r^2$ $(r=5)$

$\Rightarrow \underline{\gamma : (x+1)^2+(y-2)^2 = 25}$

2e méthode : $r = \|\vec{AC}\| = \left\|\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \ldots$

e) $A(3;2)$, $B(-1;6)$ diamètre :

centre : milieu de AB : $M_{AB}\left(\frac{3+(-1)}{2};\frac{2+6}{2}\right) = (1;4)$

$\Rightarrow \gamma : (x-1)^2+(y-4)^2 = r^2$

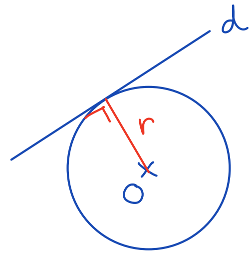
1e méthode : $A \in \gamma \Rightarrow (3-1)^2+(2-4)^2 = 4+4 = 8 = r^2$ $(r=\sqrt{8}=2\sqrt{2})$

$\Rightarrow \underline{\gamma : (x-1)^2+(y-4)^2 = 8}$

(2e méthode : $r = \frac{\|\vec{AB}\|}{2} = \|\vec{AM}_{AB}\| = \ldots$)

f) $C(0;0)$ et tgt à $d : 3x-4y+20=0$

$r = \delta(C;d) = \frac{|3\cdot 0-4\cdot 0+20|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{20}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$



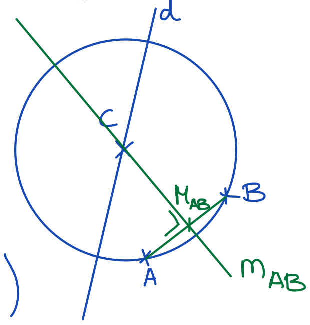
$\Rightarrow \underline{\gamma : x^2+y^2=16}$

g) $C(1;-1)$ et tgt à $d : 5x-12y+9=0$

$r = \delta(C;d) = \frac{|5\cdot 1-12\cdot(-1)+9|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}} = \frac{26}{13} = 2 \Rightarrow \underline{\gamma : (x-1)^2+(y+1)^2=4}$

h) $\underbrace{\text{passe par } A(3;1) \text{ et } B(-1;3)}$ et $C \in d : 3x-y-2=0$

le centre se trouve sur
la médiatrice de AB



$*$ m_{AB} : $\vec{AB} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \vec{n}_{m_{AB}}$

(vecteur normal de m_{AB}
car $\perp$ à AB)

$\Rightarrow$ m_{AB} : $-2x+y+c=0$ et

$M_{AB}\left(\frac{3+(-1)}{2} ; \frac{1+3}{2}\right) = (1;2) \in m_{AB} \Rightarrow -2\cdot1+2+c=0 \Leftrightarrow c=0$

$\Rightarrow$ $\underline{m_{AB} : \ -2x+y=0}$

$*$ $C \in d \cap m_{AB}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} 3x-y=2 & \mid 1 \\ -2x+y=0 & \mid 1 \end{cases}$

$x = 2 \Rightarrow 3\cdot2-y=2 \Leftrightarrow y=4 \Rightarrow C(2;4)$

$\Rightarrow$ $\gamma : (x-2)^2+(y-4)^2=r^2$ et

$A \in \gamma \Rightarrow (3-2)^2+(1-4)^2 = 1+9 = 10 \Rightarrow \gamma : (x-2)^2+(y-4)^2=10$

$(r=\sqrt{10})$

i) passe par $A(1;1)$ $B(1;-1)$ et $C(2;0)$

$*$ m_{AB} : $\vec{AB} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \vec{n}_{m_{AB}}$ (vecteur vertical)

$\Rightarrow$ $y+c=0$ (drte horizontale)

$M_{AB}\left(\frac{1+1}{2} ; \frac{1+(-1)}{2}\right) = (1;0) \in m_{AB} \Rightarrow 0+c=0 \Leftrightarrow c=0$

$\Rightarrow$ $\underline{m_{AB} : \ y=0}$ (c'est l'axe Ox)

$*$ m_{AC} : $\vec{AC} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \vec{n}_{m_{AC}} \Rightarrow x-y+c=0$

$M_{AC}\left(\frac{1+2}{2} ; \frac{1+0}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}\right) \in m_{AC} \Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{1}{2}+c=0 \Leftrightarrow c=-1$

$\Rightarrow$ m_{AC} : $\underline{x-y-1=0}$

$*$ $K = m_{AB} \cap m_{AC} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow x=1 \Rightarrow K(1;0)$

$\Rightarrow$ $\gamma : (x-1)^2+y^2=r^2$

$A \in \gamma \Rightarrow (1-1)^2+1^2 = 0+1 = 1 = r^2 \Rightarrow \gamma : (x-1)^2+y^2=1$

Ex 3.3.3

Ex 3.3.4

$\gamma_1 : x^2+y^2-16x-20y+115=0$

$x^2-16x+64+y^2-20y+100=-115+64+100$

$(x-8)^2+(y-10)^2=49$

$\Rightarrow C_1(8;10)$ et $r_1=7$

$\gamma_2 : x^2+y^2+8x-10y+5=0$

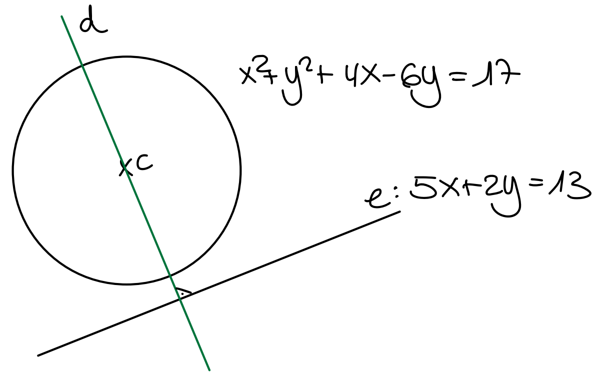
$x^2+8x+16+y^2-10y+25=-5+16+25$

$(x+4)^2+(y-5)^2=36$

$C_2(-4;5)$ et $r_2=6$

$\overrightarrow{C_1C_2}=\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\-5\end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{C_1C_2}\|=\sqrt{144+25}=13=7+6=r_1+r_2$

$\Rightarrow$ les cercles sont tangents extérieurement.



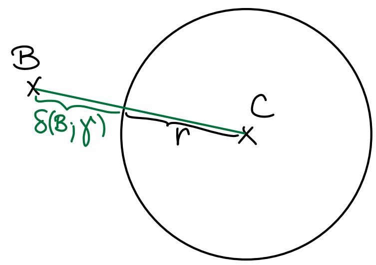
Ex 3.3.5

- $(x^2+4x+4)+(y^2-6y+9)=17+4+9$

  $(x+2)^2+(y-3)^2=30 \Rightarrow C(-2;3)$ et $r=\sqrt{30}$

- le diamètre est $\perp$ à e et passe par C

  $$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \quad d: 2x-5y+c=0 \\ C\in d: \quad -4-15+c=0 \\ \qquad\qquad c=19 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad d: 2x-5y+19=0$$



Ex 3.3.6

* $x^2-26x+169+y^2+30y+225=-313+169+225$

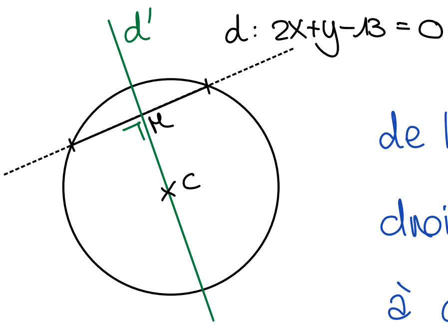
  $(x-13)^2+(y+15)^2=81$

  $\Rightarrow C(13;-15)$ et $r=9$

* distance de B à C : $\vec{BC}=\begin{pmatrix}13\\-15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-24\end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{BC}\|=\sqrt{10^2+24^2}=26$

* distance de B à γ : $\|\vec{BC}\|-r=26-9=17\,u$

Ex 3.3.7

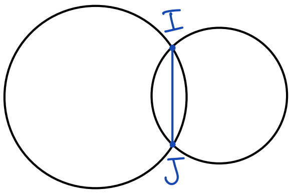


* Comme la droite cherchée passe par le milieu de la corde et par le centre du cercle (diamètre), cette droite est la médiatrice de la corde, donc perpendiculaire à d $\Rightarrow \quad d': x-2y+c=0$

* $C(2;-1)\in d' \Rightarrow 2-2\cdot(-1)+c=0 \Leftrightarrow c=-4$

  $\Rightarrow \quad d': x-2y-4=0$

Ex 33.8



On commence par chercher les points d'intersection des deux cercles :

$$-\begin{cases} x^2+y^2-10x-10y=0 \\ x^2+y^2+6x+2y-40=0 \end{cases}$$

$$-16x-12y+40=0 \quad \Big| \div(-4)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x+3y-10=0$$

$$\Leftrightarrow \quad y=-\frac{4}{3}x+\frac{10}{3}$$

substit.

$$\Longrightarrow \quad x^2+\left(-\frac{4}{3}x+\frac{10}{3}\right)^2-10x-10\left(-\frac{4}{3}x+\frac{10}{3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+\frac{16}{9}x^2-\frac{80}{9}x+\frac{100}{9}-10x+\frac{40}{3}x-\frac{100}{3}=0 \quad \Big| \cdot 9$$

$$\Leftrightarrow \quad 9x^2+16x^2-80x+100-90x+120x-300=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 25x^2-50x-200=0 \quad \Big| \div 25$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-2x-8=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-4)(x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2}=\begin{cases} 4 & \Longrightarrow \quad y=-\frac{4}{3}\cdot 4+\frac{10}{3}=-2 \quad \Longrightarrow \quad I(4;-2) \\ -2 & \Longrightarrow \quad y=-\frac{4}{3}\cdot(-2)+\frac{10}{3}=6 \quad \Longrightarrow \quad J(-2;6) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{IJ}=\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \|\vec{IJ}\|=\sqrt{36+64}=10\ u$$

Ex 3.3.9

$d: 4x-5y-3=0 \qquad t_1: 2x-3y-10=0 \qquad t_2: 3x-2y+5=0$

* cercle tgt à t_1 et t_2 donc centre sur bissectrices de t_1 et t_2 :

$$\frac{2x-3y-10}{\underbrace{\sqrt{2^2+(-3)^2}}_{\sqrt{13}}} = \pm \frac{3x-2y+5}{\underbrace{\sqrt{3^2+(-2)^2}}_{\sqrt{13}}} \quad \Big| \cdot \sqrt{13}$$

$$2x-3y-10 = \pm(3x-2y+5)$$

$\oplus$ $2x-3y-10 = 3x-2y+5$

$-x-y-15=0$

$b_1: x+y+15=0$

$\ominus$ $2x-3y-10 = -3x+2y-5$

$5x-5y-5=0$

$b_2: x-y-1=0$

* $C_1 = d \cap b_1$: $\begin{cases} 4x-5y=3 & \big| 1 \\ x+y=-15 & \big| 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 4x-5y=3 \\ 5x+5y=-75 \\ \hline 9x = -72 \\ x = -8 \end{array}$

$(2^e) \Rightarrow -8+y=-15$

$y=-7 \Rightarrow C_1(-8;-7)$

$$r_1 = \delta(C_1; t_1) = \frac{|2\cdot(-8)-3\cdot(-7)+10|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{13}$$

$$\Rightarrow \gamma_1: (x+8)^2+(y+7)^2 = \frac{25}{13}$$

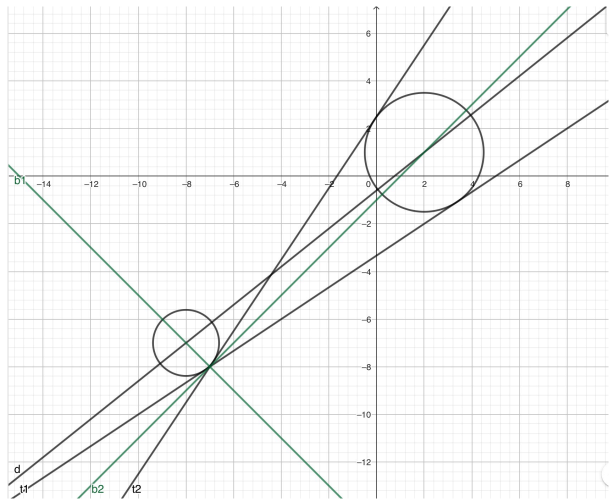
* $C_2 = d \cap b_2$: $\begin{cases} 4x-5y=3 & \big| 1 \\ x-y=1 & \big| -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 4x-5y=3 \\ -5x+5y=-5 \\ \hline -x = -2 \\ x = 2 \end{array}$

$(2^e) \Rightarrow 2-y=1$

$y=1 \Rightarrow C_2(2;1)$

$$r_2 = \delta(C_2; t_1) = \frac{|2\cdot(2)-3\cdot(1)+10|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{9}{\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{13}}{13}$$

$$\Rightarrow \gamma : (x-2)^2+(y-1)^2 = \frac{81}{13}$$



Ex 3.3.10

$d: \ 2x+y=0 \qquad t_1: \ 4x-3y+10=0 \qquad t_2: \ 4x-3y-30=0$

$*$ cercle tgt à t_1 et t_2 donc centre sur bissectrices de t_1 et t_2 :

$$\frac{4x-3y+10}{\underbrace{\sqrt{4^2+(-3)^2}}_{5}} = \pm \frac{4x-3y-30}{\underbrace{\sqrt{4^2+(-3)^2}}_{5}} \quad \Big| \cdot 5$$

$$4x-3y+10 = \pm(4x-3y-30)$$

$\oplus$: $4x-3y+10 = 4x-3y-30$
$40 = 0$ ↯

$\ominus$: $4x-3y+10 = -4x+3y+30$
$8x-6y-20=0$
$b_2: \ \underline{\underline{4x-3y-10=0}}$

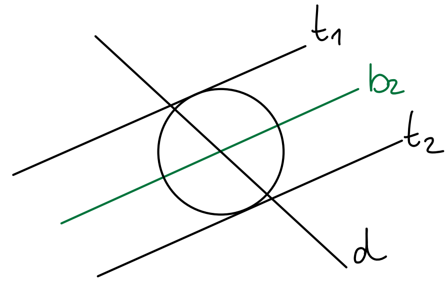
les droites t_1 et t_2 étant parallèles il n'y a qu'une seule bissectrice, // à t_1 et t_2 et qui se trouve au milieu des deux dtes donc $c = \frac{c_1+c_2}{2}$ (a et b identiques car //)

$*$ $C = d \cap b_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=0 & |\,3 \\ 4x-3y=10 & |\,1 \end{cases} \Rightarrow + \begin{array}{r} 6x+3y=0 \\ 4x-3y=10 \\ \hline 10x \quad =10 \\ x \quad = 1 \end{array}$ $\overset{1^e\,eq.}{\Longrightarrow}$ $2+y=0 \Leftrightarrow y=-2$

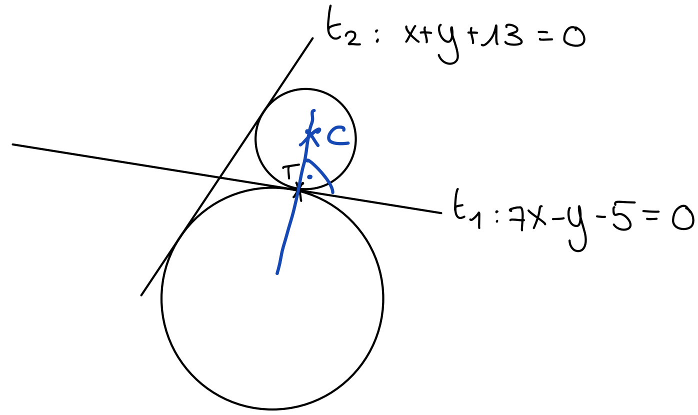
$\Rightarrow \underline{\underline{C(1;-2)}}$

$*$ $r = \delta(C;t_1) = \dfrac{|4\cdot 1-3\cdot(-2)+10|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \dfrac{20}{5} = \underline{\underline{4}}$

$\Rightarrow \gamma: \ (x-1)^2+(y+2)^2=16$



Ex 3.3.12



* $T(1;2) \in t_1$ car $7 \cdot 1 - 2 - 5 = 0$

* cercle tgt à t_1 et t_2 donc

centre sur bissectrices de t_1 et t_2 :

$$\frac{7x-y-5}{\underbrace{\sqrt{49+1}}_{\sqrt{50}=5\sqrt{2}}} = \pm \frac{x+y+13}{\underbrace{\sqrt{1+1}}_{\sqrt{2}}}$$

$$\frac{7x-y-5}{5\sqrt{2}} = \pm \frac{5(x+y+13)}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow 7x-y-5 = \pm 5(x+y+13)$$

(+) $7x-y-5 = 5x+5y+65$

$2x-6y-70=0$

$\underline{\underline{b_1 : x-3y-35=0}}$

(−) $7x-y-5 = -5x-5y-65$

$12x+4y+60=0$

$\underline{\underline{b_2 : 3x+y+15=0}}$

* Comme T est le point de contact (ou de tangence) et que $T \in t_1$, le centre se trouve sur une droite p perpendiculaire à t_1 (la tangente et la droite passant par le centre et le point de tangence sont tjrs perpendiculaires.)

$\Rightarrow \quad p : x+7y+c=0$ et

$T \in p \Rightarrow 1+7\cdot 2+c=0 \Leftrightarrow c=-15 \Rightarrow \underline{\underline{p: x+7y-15=0}}$

* $C_1 = p \cap b_1 : \begin{cases} x+7y=15 \\ x-3y=35 \end{cases} \begin{array}{|l} 1 \\ -1 \end{array}$

$$\begin{array}{r} x+7y=15 \\ -x+3y=-35 \\ \hline 10y=-20 \end{array} \Leftrightarrow y=-2$$

$\overset{1^{re}\text{ éq.}}{\Rightarrow} \quad x-14=15 \Leftrightarrow x=29 \Rightarrow C_1(29;-2)$

* $r_1 = \delta(C_1; t_2) = \dfrac{|29-2+13|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}$ ou $\delta(C_1;T) = \|\overrightarrow{C_1T}\|$

$\Rightarrow \quad \gamma_1 : (x-29)^2+(y+2)^2=800$

$* \quad C_2 = p \cap b_2 : \begin{cases} x + 7y = 15 \\ 3x + y = -15 \end{cases} \begin{array}{|l} 3 \\ -1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3x + 21y = 45 \\ -3x \quad -y = 15 \\ \hline 20y = 60 \end{array} \Leftrightarrow y = 3$

$\overset{1^{e}\text{éq.}}{\Rightarrow} \quad x + 21 = 15 \quad \Leftrightarrow \quad x = -6 \quad \Rightarrow \quad C(-6;3)$

$* \quad r_2 = \delta(C_2; t_2) = \dfrac{|-6+3+13|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad \gamma_1 : (x+6)^2 + (y-3)^2 = 50$

Ex 3.3.14

$d_1: \quad 4x-3y-10=0$

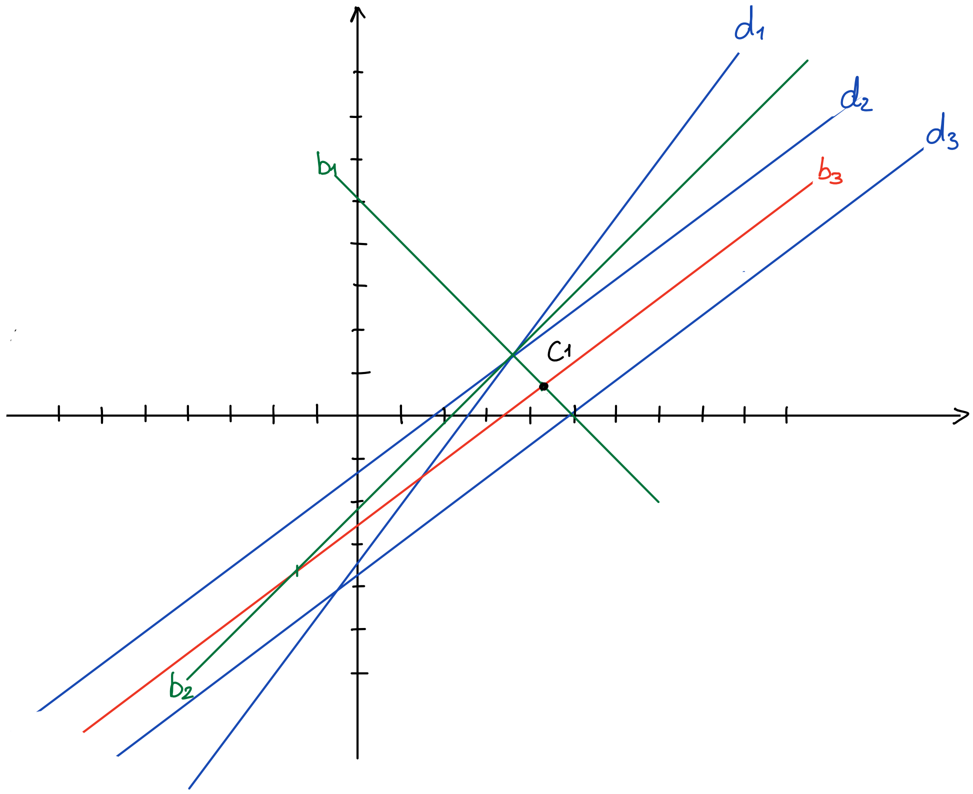
$\Leftrightarrow \quad y=\frac{4}{3}x-\frac{10}{3}$

$d_2: \quad 3x-4y-5=0$

$y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$

$d_3: \quad 3x-4y-15=0$

$y=\frac{3}{4}x-\frac{15}{4}$



$C(4{,}3\,;\,0{,}7)$
$C'(-1{,}4\,;\,-3{,}6)$

On cherche un cercle tangent à trois droites, le centre est donc à l'intersection des bissectrices.

* bissectrices de d_1 et d_2 :

$$\frac{4x-3y-10}{\underbrace{\sqrt{4^2+(-3)^2}}_{5}}=\pm\frac{3x-4y-5}{\underbrace{\sqrt{3^2+(-4)^2}}_{5}} \quad \Big|\cdot 5$$

$$4x-3y-10=\pm(3x-4y-5)$$

$\oplus$: $4x-3y-10=3x-4y-5$

$b_1: \quad x+y-5=0$

$\ominus$ $\quad 4x-3y-10=-3x+4y+5$

$b_2: \quad 7x-7y-15=0$

* bissectrices de d_2 et d_3 :

$$\frac{3x-4y-5}{\underbrace{\sqrt{3^2+(-4)^2}}_{5}}=\pm\frac{3x-4y-15}{\underbrace{\sqrt{3^2+(-4)^2}}_{5}} \quad \Big|\cdot 5$$

$$3x-4y-5=\pm(3x-4y-15)$$

$\oplus$ $\quad 3x-4y-5=3x-4y-15$

$10=0$ ↯

$\ominus$ $\quad 3x-4y-5=-3x+4y+15$

$6x-8y-20=0$

$b_3: \quad 3x-4y-10=0$

les droites d_2 et d_3 étant parallèles il n'y a qu'une seule bissectrice // à d_2 et d_3 et qui se trouve au milieu des deux dtes donc $c=\frac{c_2+c_3}{2}$ (a et b identiques car //)

Il y a deux cercles et les centres se trouvent à l'intersection de $b_1 \cap b_3$ et de $b_2 \cap b_3$ (comme on le voit sur le graphique)

$*$ $b_1 \cap b_3$: $\begin{cases} x+y-5=0 \\ 3x-4y-10=0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 4 \\ 1 \end{array} \right.$

$$\Rightarrow + \begin{array}{r} 4x+4y-20=0 \\ 3x-4y-10=0 \\ \hline 7x \quad -30=0 \end{array}$$

$$x = \frac{30}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{30}{7}+y-5=0$$

$$y = 5-\frac{30}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow C_1\left(\frac{30}{7};\frac{5}{7}\right)$$

$$r_1 = \delta(C_1; d_1) = \frac{\left|4\cdot\frac{30}{7}-3\cdot\frac{5}{7}-10\right|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\Rightarrow \gamma_1 : \left(x-\frac{30}{7}\right)^2+\left(y-\frac{5}{7}\right)^2 = 1$$

$*$ $b_2 \cap b_3$: $\begin{cases} 7x-7y-15=0 \\ 3x-4y-10=0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} -3 \\ 7 \end{array} \right.$

$$\Rightarrow + \begin{array}{r} -21x+21y+45=0 \\ 21x-28y-70=0 \\ \hline -7y-25=0 \end{array}$$

$$y = -\frac{25}{7}$$

$$\Rightarrow 3x-4\cdot\left(-\frac{25}{7}\right)-10=0$$

$$3x = -\frac{100}{7}+10 = -\frac{30}{7}$$

$$x = -\frac{10}{7}$$

$$\Rightarrow C_2\left(-\frac{10}{7};-\frac{25}{7}\right)$$

$$r_2 = \delta(C_2; d_1) = \frac{\left|4\cdot\left(-\frac{10}{7}\right)-3\cdot\left(-\frac{25}{7}\right)-10\right|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\Rightarrow \gamma_2 : \left(x+\frac{10}{7}\right)^2+\left(y+\frac{25}{7}\right)^2 = 1$$

2.1.17 Calculer la valeur de l'angle[1] aigu formé par la droite $3x - y = 1$ et le cercle $(x-2)^2 + y^2 = 5$.

$C(2;0)$ et $r = \sqrt{5}$

- $$d \cap \gamma : y = 3x - 1 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2 + (3x-1)^2 = 5$$
$$\Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 + 9x^2 - 6x + 1 = 5 \quad \Rightarrow \quad 10x^2 - 10x = 0 \quad \Rightarrow \quad 10x(x-1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -1,\ y_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad T_1(0;-1),\ T_2(1;2)$$

- $$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{CT_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad t_1 : 2x + y + c = 0 \\ T_1 \in t_1 : \quad 0 - 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow t_1 : 2x + y + 1 = 0$$

$(t_2 : x - 2y + 3 = 0)$

- $m_d = 3$ et $m_{t_1} = -2 \quad \Rightarrow \quad \tan(\alpha) = \left| \dfrac{-2-3}{1-6} \right| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 45°$

2.1.18 Calculer l'angle[2] sous lequel se coupent les cercles $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 8$ et $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 2$.

- $\gamma_1 : x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x - 2y + 2 = 0$

$\gamma_2 : x^2 - 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x + 4y + 6 = 0$

pts d'intersections :
$$- \begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 2y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 4y + 6 = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$$
$$-2x - 6y - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x + 3y + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3y - 2$$

on substitue dans γ_1 $\Rightarrow$
$$(-3y-2)^2 + y^2 - 6(-3y-2) - 2y + 2 = 0$$
$$9y^2 + 12y + 4 + y^2 + 18y + 12 - 2y + 2 = 0$$
$$10y^2 + 28y + 18 = 0$$
$$5y^2 + 14y + 9 = 0 \qquad \Delta = 14^2 - 4 \cdot 5 \cdot 9 = 16$$

$y_{1,2} = \dfrac{-14 \pm 4}{10} = $
- $-1 \quad \Rightarrow \quad x = -3(-1) - 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad A(1;-1)$
- $-\frac{9}{5} \quad \Rightarrow \quad x = -3\left(-\frac{9}{5}\right) - 2 = \frac{17}{5} \quad \Rightarrow \quad B\left(\frac{17}{5}; -\frac{9}{5}\right)$

- t_1 tangente à γ_1 en A :

$\vec{AC_1} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}_{t_1} \Rightarrow t_1 : x+y+c=0$

$A \in t_1 : 1-1+c=0 \Leftrightarrow c=0$

$\Rightarrow t_1 : x+y=0$ et $m_1 = -\frac{1}{1} = -1$

t_2 tangente à γ_2 en A :

$\vec{AC_2} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{n}_{t_2} \Rightarrow t_2 : x-y+c=0$

$A \in t_2 : 1+1+c=0 \Leftrightarrow c=-2$

$\Rightarrow t_2 : x-y-2=0$ et $m_2 = -\frac{1}{-1} = 1$

- $\tan(\varphi) = \left| \frac{1-(-1)}{\underbrace{1+(-1)\cdot 1}_{=0}} \right|$ ↯ $\Rightarrow$ l'angle vaut $90°$, en effet $m_1 \cdot m_2 = 1 \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow t_1 \perp t_2$

Rem : dans cette deuxième partie d'ex. on n'est pas obligé de déterminer les équations des tangentes. Avec les vecteurs normaux, on peut utiliser la formule :

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|1-1|}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow \varphi = \cos^{-1}(0) = 90°$$

2.1.19 Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 + 10\,x = 2\,y - 6$, de direction donnée par la droite $2\,x + y = 7$. $\Leftrightarrow$ $y = -2x + 7$

- γ : $x^2 + 10x + y^2 - 2y = -6$

$x^2 + 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 = -6 + 25 + 1$

$(x+5)^2 + (y-1)^2 = 20 \Rightarrow C(-5;1)$ et $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

- d : $2x + y - 7 = 0$

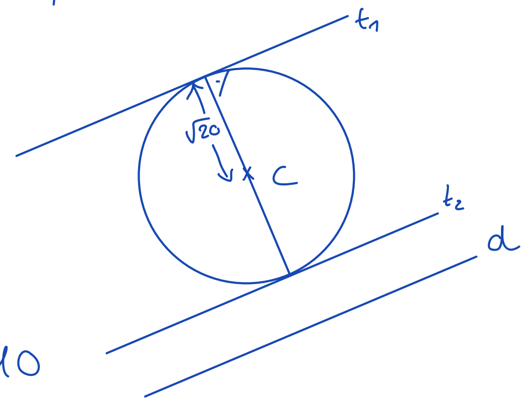
Comme $t \,//\, d \Rightarrow t : 2x + y + c = 0$

et $\delta(C;t) = r \Leftrightarrow \dfrac{|2(-5) + 1 + c|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{20}$

$\Leftrightarrow |-9 + c| = \sqrt{100} = 10$

$\Leftrightarrow -9 + c = \pm 10$

$\Leftrightarrow c = \begin{cases} 10 + 9 = 19 & \Rightarrow t_1 : 2x + y + 19 = 0 \\ -10 + 9 = -1 & \Rightarrow t_2 : 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$



2.1.20 Former les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 - 2\,x + 4\,y = 0$, qui sont perpendiculaires à la droite $x = 2\,y + 345$.

- γ : $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 1 + 4$

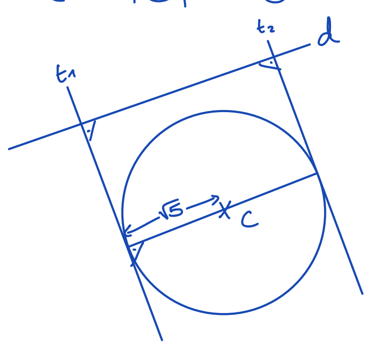
$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5 \Rightarrow C(1;-2)$ et $r = \sqrt{5}$

- d : $x - 2y - 345 = 0$

Comme $t \perp d \Rightarrow t : 2x + y + c = 0$

et $\delta(C;t) = r \Leftrightarrow \dfrac{|2\cdot 1 + (-2) + c|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |c| = 5 \Leftrightarrow c = \pm 5$

$\Rightarrow \begin{cases} t_1 : 2x + y + 5 = 0 \\ t_2 : 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$



Ex 2.1.21 $\quad \gamma : x^2+y^2 = 19-2x \qquad A(1;6)$

- $(x^2+2x+1)+y^2 = 19+1$

  $(x+1)^2+y^2 = 20 \quad \Rightarrow \quad C(-1;0)$ et $r=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

- A est extérieur au cercle :

  $\|\vec{CA}\| = \left\|\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{40} > \sqrt{20} = r \quad \checkmark$

- $t : y = mx+h \iff t: mx-y+h=0$

1) $A(1;6)\in t \Rightarrow m-6+h=0 \iff h=6-m$

substitution

$\Rightarrow t: mx-y+6-m=0 \quad (*)$

2) $\delta(C;t)=\sqrt{20} \iff \dfrac{|-m-0+6-m|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{20} \iff \dfrac{|6-2m|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{20}$

$\iff |6-2m| = \sqrt{20}\sqrt{m^2+1} \quad \Big| \; ()^2$

$(**) \iff (6-2m)^2 = 20(m^2+1)$

$\iff 36-24m+4m^2 = 20m^2+20$

$\iff 16m^2+24m-16=0$

$\iff 2m^2+3m-2=0 \qquad \Delta = 25$

$\iff m_{1,2} = \dfrac{-3\pm5}{4} = \begin{cases} 1/2 \overset{(*)}{\Rightarrow} t_1 : \frac{1}{2}x-y+\frac{11}{2}=0 \iff t_1: x-2y+11=0 \\ -2 \overset{(*)}{\Rightarrow} t_2: -2x-y+8=0 \iff t_2: 2x+y-8=0 \end{cases}$

Avec formule : $e_2 - c_2 = m(e_1 - c_1) \pm r\sqrt{m^2+1}$ avec $A(e_1; e_2) = A(1;6)$

$$6 - 0 = m\underbrace{(1-(-1))}_{2} \pm \sqrt{20}\sqrt{m^2+1}$$

$$6 - 2m = \pm\sqrt{20}\sqrt{m^2+1} \quad \Big| \ (\ )^2$$ idem plus haut

(**)

$\vdots$

$$\Leftrightarrow \quad m_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad t_1 : y = \frac{1}{2}x + h$ et $A(1;6) \in t_1 \Rightarrow 6 = \frac{1}{2} + h \Leftrightarrow h = \frac{11}{2}$

idem plus haut

$\Rightarrow \quad t_2 : y = -2x + h$ et $A(1;6) \in t_2 \Rightarrow 6 = -2 + h \Leftrightarrow h = 8$

idem plus haut

Ex 2.1.22 $\gamma : x^2+y^2-2x+4y = 20$ $A(6;5)$

- $(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4) = 20+1+4$

  $(x-1)^2+(y+2)^2 = 25 \Rightarrow C(1;-2)$ et $r=5$

- A est extérieur au cercle :

  $\|\vec{CA}\| = \left\|\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{35+49} = \sqrt{74} \cong 8,\ldots > 5 = r$ ✓

- avec formule : $e_2-c_2 = m(e_1-c_1) \pm r\sqrt{m^2+1}$ avec $A(e_1;e_2)=A(6;5)$

$$5+2 = m(6-1) \pm 5\sqrt{m^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad 7-5m = \pm 5\sqrt{m^2+1} \quad \Big|\ (\,)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 49-70m+25m^2 = 25(m^2+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 24 = 70m$$

$$\Leftrightarrow \quad m = \frac{24}{70} = \frac{12}{35}$$

$\Rightarrow t_1 : y = \frac{12}{35}x + h$ et $A(6;5) \in t \Rightarrow 5 = \frac{12}{35}\cdot 6 + h \Leftrightarrow h = \frac{103}{35}$

$\Rightarrow t_1 : \frac{12}{35}x - y + \frac{103}{35} = 0 \Leftrightarrow t_1 : 12x-35y+103 = 0$

La 2e tangente est verticale ! $\Rightarrow t_2 : x = 6$ car passe par $A(6;5)$

Rem : Il y a toujours $\underline{\underline{2}}$ tgtes à un cercle passant par 1 pt. ext.
Lorsqu'on ne trouve qu'une valeur pour m, l'autre tangente est verticale $(m \to \infty)$ d'équation $x = e_1$ avec $E(e_1;e_2)$

ou sans formule :

- $t : y = mx + h \iff \underline{t : mx - y + h = 0}$

1) $A(6;5) \in t \Rightarrow 6m - 5 + h = 0 \iff h = 5 - 6m$

substitution

$\Rightarrow \underline{t : mx - y + 5 - 6m = 0}$

2) $\delta(C;t) = \sqrt{20} \iff \dfrac{|m + 2 + 5 - 6m|}{\sqrt{m^2+1}} = 5 \iff \dfrac{|7 - 5m|}{\sqrt{m^2+1}} = 5$

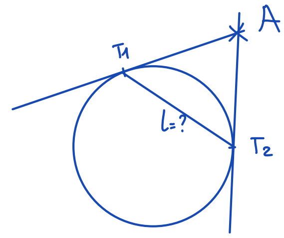
$\iff |7 - 5m| = 5\sqrt{m^2+1} \quad \Big| \, (\,)^2$

$\iff (7 - 5m)^2 = 25(m^2 + 1)$ idem plus haut

$\vdots$

Ex 2.1.24

$A(4;-4)$ et $\gamma: x^2+y^2 = 6x-2y-5$



- $\gamma: x^2-6x+9+y^2+2y+1 = -5+9+1$

  $(x-3)^2+(y+1)^2 = 5 \Rightarrow C(3;-1)$ et $r=\sqrt{5}$

- $\|\vec{AC}\| = \left\|\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} > \sqrt{5} \Rightarrow$ A est ext. au cercle

- On cherche l'équation des tangentes à γ en A (sans formule)

1) $\left.\begin{array}{l} t: y = mx+h \\ A \in t \Rightarrow -4 = 4m+h \Leftrightarrow h = -4-4m \end{array}\right\} \Rightarrow t: y = mx-4-4m$

$\Leftrightarrow \underline{mx-y-4-4m = 0}$

2) $\delta(C;t) = r \Leftrightarrow \dfrac{|m\cdot 3-(-1)-4-4m|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \dfrac{|-m-3|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow |-m-3| = \sqrt{5}\sqrt{m^2+1} \quad |\,(\,)^2$

$\Leftrightarrow (-m-3)^2 = 5(m^2+1)$

$\Leftrightarrow m^2+6m+9 = 5m^2+5$

$\Leftrightarrow 4m^2-6m-4 = 0$

$\Leftrightarrow 2m^2-3m-2 = 0 \qquad \Delta = 9-4\cdot 2\cdot(-2) = 25$

$\Leftrightarrow m_{1,2} = \dfrac{3\pm 5}{4} = \begin{cases} 2 & \Rightarrow \underline{t_1: 2x-y-12 = 0} \\ -\frac{1}{2} & \Rightarrow \underline{t_2}: -\frac{1}{2}x-y-2 = 0 \Leftrightarrow \underline{x+2y+4 = 0} \end{cases}$

- $\{T_1\} = t_1 \cap \gamma: \begin{cases} 2x-y-12 = 0 & \Rightarrow y = 2x-12 \\ x^2+y^2 = 6x-2y-5 & \end{cases}$ on substitue

$\Rightarrow \quad x^2 + (2x-12)^2 = 6x - 2(2x-12) - 5$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 4x^2 - 48x + 144 = 6x - 4x + 24 - 5$

$\Leftrightarrow \quad 5x^2 - 50x + 125 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 10x + 25 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-5)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5 \quad \Rightarrow \quad y = 2\cdot 5 - 12 = -2 \quad \Rightarrow \quad \underline{T_1(5;-2)}$

- $\{T_2\} = t_2 \cap \gamma : \begin{cases} x + 2y + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 = 6x - 2y - 5 \end{cases} \Rightarrow \quad x = -2y - 4$ on substitue

$\Rightarrow \quad (-2y-4)^2 + y^2 = 6(-2y-4) - 2y - 5$

$\Leftrightarrow \quad 4y^2 + 16y + 16 + y^2 = -12y - 24 - 2y - 5$

$\Leftrightarrow \quad 5y^2 + 30y + 45 = 0$

$\Leftrightarrow \quad y^2 + 6y + 9 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (y+3)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -3 \quad \Rightarrow \quad x = -2\cdot(-3) - 4 = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{T_2(2;-3)}$

- $l = \|\overrightarrow{T_1T_2}\| = \left\|\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{9+1} = \underline{\sqrt{10}\ u}$