# Ex supplémentaire : combinaison linéaire et base

Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9/2 \end{pmatrix}$ dans une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$

a) Ecrire le vecteur $\vec{c}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et de $\vec{b}$

On cherche k et m tels que $\vec{c} = k \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{b}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2k - 2m = 6 & \cdot 3 \\ -k + 3m = -7 & \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & 6k - 6m = 18 \\ + & -2k + 6m = -14 \\ \hline & 4k = 4 \\ & k = 1 \end{array}$$

on substitue dans la 1e équation :

$2 - 2m = 6$

$-2m = 4$

$m = -2$

$$\Rightarrow \vec{c} = 1 \cdot \vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$$

b) $\vec{a}$ et $\vec{b}$ peuvent-ils former une base ?

Si oui quelles sont les composantes de $\vec{c}$ dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{a}; \vec{b})$

Il faut voir si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires ou non :

avec le 2e critère : $2 \cdot 3 - (-1) \cdot (-2) = 6 - 2 = 4 \neq 0$

$\Rightarrow$ $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires ($\vec{a} \not\parallel \vec{b}$)

$\Rightarrow$ $\vec{a}$ et $\vec{b}$ forment une base

Dans cette base $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ car $\vec{c} = 1 \cdot \vec{a} - 2\vec{b}$ (cf. a))

c) Déterminer les composantes de $\vec{d}$ dans la base $B' = (\vec{a}; \vec{b})$

On cherche x et y tels que $\vec{d} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -7 \\ 9/2 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} 2x - 2y = -7 & \Big| \cdot 3 \\ -x + 3y = \frac{9}{2} & \Big| \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & 6x - 6y = -21 \\ + & -2x + 6y = 9 \\ \hline & 4x = -12 \\ & x = -3 \end{array}$$

on substitue dans (1)

$$2 \cdot (-3) - 2y = -7$$
$$-6 - 2y = -7$$
$$1 = 2y$$
$$y = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$