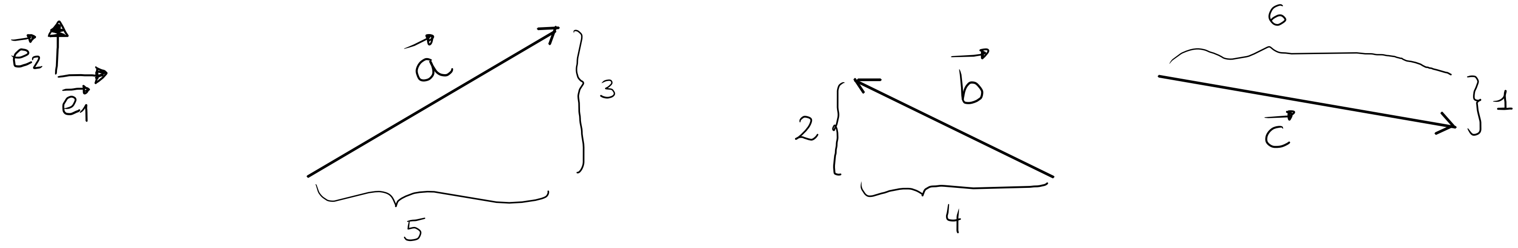
Base de vecteurs



On aimerait calculer $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ (sans dessiner)

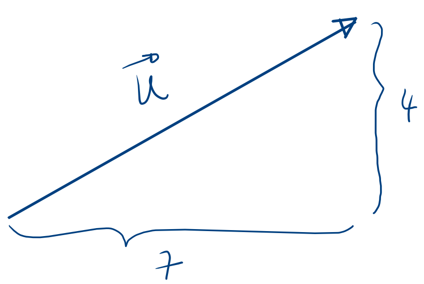
1) Exprimer $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ comme combinaison linéaire de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$

$$\vec{a} = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$$

$$\vec{b} = -4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$$

$$\vec{c} = 6\vec{e}_1 - \vec{e}_2$$

2) on additionne : $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$



$$= 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + (-4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) + 6\vec{e}_1 - \vec{e}_2$$

$$= 7\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$$

Pour simplifier l'écriture de ces vecteurs on écrit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Déf : 1) Une base de vecteurs du plan est un couple de vecteurs non colinéaires noté $\mathcal{B} = (\vec{e_1} ; \vec{e_2})$

2) Dans la base $\mathcal{B}$, les composantes de $\vec{a}$ sont les deux nombres a_1 et a_2 tels $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e_1} + a_2 \cdot \vec{e_2}$

notés $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

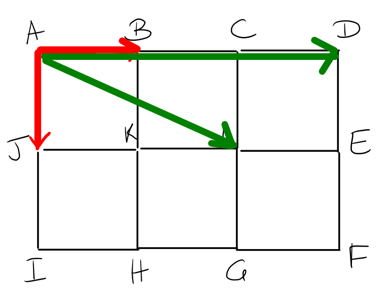
Addition : $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

exple $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+(-4) \\ 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Multiplication par un scalaire : $k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$

exple : $3\vec{a} = 3\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \end{pmatrix}$

Exemple



Dans la base $\mathcal{B} = (\vec{AB} ; \vec{AJ})$: $\vec{AL} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{AJ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

" " $\mathcal{B}' = (\vec{AL} ; \vec{AD})$: $\vec{AL} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{AJ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

Un même vecteur a des composantes différentes suivant la base dans laquelle on travaille.