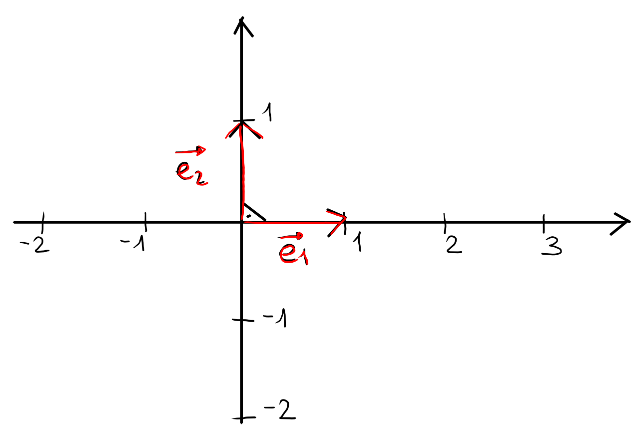
1.4 Produit scalaire et norme

Norme

Rappel : La norme d'un vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la longueur d'un représentant de $\vec{u}$.

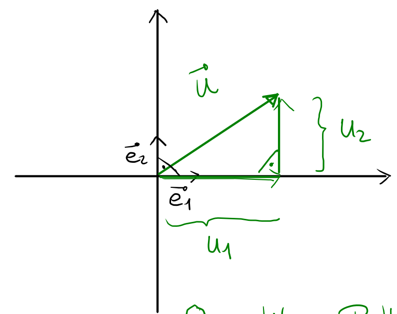
Définitions :
1) Un vecteur est dit unitaire si sa norme égale 1
2) Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux s'ils sont perpendiculaires. On note $\vec{u} \perp \vec{v}$
3) Un repère $\mathcal{R} = (O ; \vec{e_1} ; \vec{e_2})$ est orthonormé si
   1) $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ sont unitaires : $\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = 1$
   2) $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ sont orthogonaux : $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$



Rem : Dorénavant les repères sont toujours orthonormés.

Théorème : Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$



On utilise Pythagore

Exemple : $A(-1;-9)$ $B(-10;3)$ $C(6;15)$

$\triangle ABC$ est-il isocèle ?

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{AB}\| = \sqrt{(-9)^2 + 12^2} = \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15 \text{ u}$

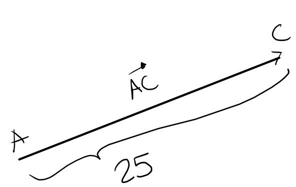
$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{BC}\| = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{400} = 20 \text{ u}$

$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 24 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{AC}\| = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 25 \text{ u}$

Non il n'est pas isocèle.

Donner un vecteur colinéaire à $\vec{AC}$ unitaire : $\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 7 \\ 24 \end{pmatrix}$

ou $-\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 7 \\ 24 \end{pmatrix}$



Soit un vecteur $\vec{a} \neq \vec{0}$, le vecteur $\frac{1}{\|\vec{a}\|}.\vec{a}$ est un vecteur colinéaire à $\vec{a}$, et unitaire (de m̂ sens)

et le vecteur $-\frac{1}{\|\vec{a}\|}.\vec{a}$ " "
" "
(de sens opposé)