Ch2 Analyse

2.3 Exponentielle et logarithme

Rappel : $\log_a(u) = x \iff a^x = u$

base du log

$a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

argument du log

$u \in \mathbb{R}_+^*$

Exple : $\log_2(8) = 3 \iff 2^3 = 8$

Convention : $\log(u) = \log_{10}(u)$ et $\ln(u) = \log_e(u)$

Chgmt de base : $\log_a(u) = \dfrac{\log_b(u)}{\log_b(a)} = \dfrac{\log(u)}{\log(a)} = \dfrac{\ln(u)}{\ln(a)}$

Exple : $\log_2(9) = \dfrac{\log(9)}{\log(2)} \simeq 3,17$

Propriétés

1) $\log_a(1) = 0$

2) $\log_a(a^x) = x$

3) $a^{\log_a(x)} = x$

$\log_a(x) = y \iff a^y = x$

$\Rightarrow a^{\log_a(x)} = x$

Exples Résoudre après avoir donné l'ED

a) $e^{2x+1} = 5 \quad | \ln(\ )$ (prop. 2) (ou déf.) $ED = \mathbb{R}$

$2x+1 = \ln(5)$

$x = \dfrac{\ln(5)-1}{2} \Rightarrow S = \left\{ \dfrac{\ln(5)-1}{2} \right\}$

b) $\ln(2-x) = 4 \quad | e^{(\ )}$ cond : $2-x > 0 \iff 2 > x$

$2-x = e^4$ $ED =]-\infty ; 2[$

$x = 2-e^4$

$\cong -52{,}6 \in ED$

$\Rightarrow S = \{2-e^4\}$

Prop (suite) 4) $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$

5) $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$

6) $\log_a(u^r) = r\log_a(u)$

<u>Exples</u> ED et résoudre

c) $\ln(x+3) = \ln(2x+7) \quad | \, e^{()}$

cond : $x+3>0$ et $2x+7>0$

$x>-3$ et $x>-\frac{7}{2}$

$ED =]-3\,;+\infty[$

$x+3 = 2x+7$

$x = -4 \notin ED$

$\Rightarrow S = \emptyset$

d) $\ln\left(\frac{x+3}{2x+7}\right) = 0 \quad | \, e^{()}$

cond : $\frac{x+3}{2x+7} > 0$

zéro : -3

v.i. : $-\frac{7}{2}$

x		$-7/2$		-3	
$\text{sgn}\left(\frac{x+3}{2x+7}\right)$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$

$ED =]-\infty\,;-\frac{7}{2}[\cup]-3\,;+\infty[$

$\frac{x+3}{2x+7} = 1$

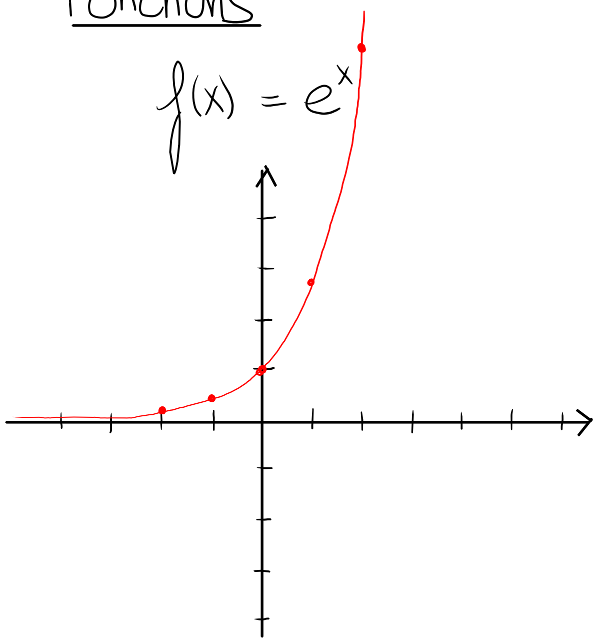
$x+3 = 2x+7$

$x = -4 \in ED$

$\Rightarrow S = \{-4\}$

Fonctions

$f(x) = e^x$



x	e^x
-2	$0{,}14$
-1	$0{,}37$
0	1
1	$2{,}71$
2	$7{,}4$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$

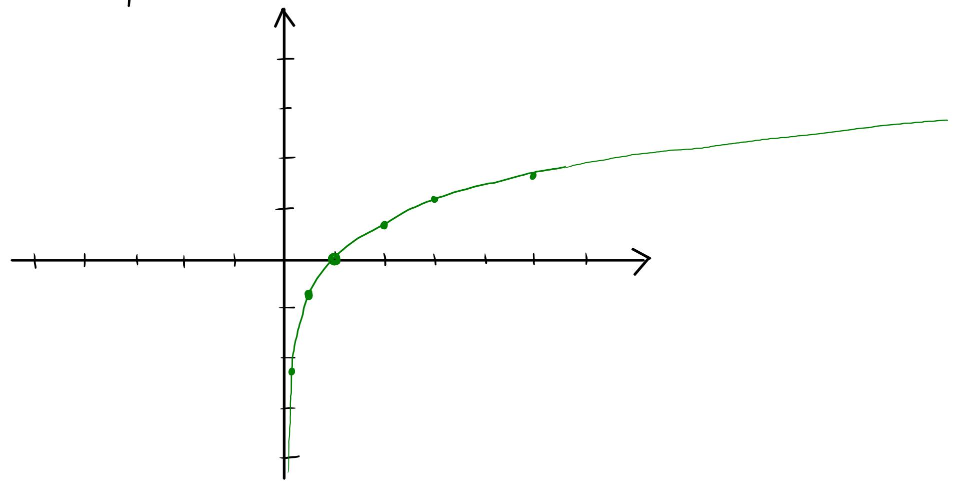
zéro : —

signe :

x	
$sgn(f)$	$+$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \Rightarrow$ AH : $y = 0$

$f(x) = \ln(x)$



x	$\ln(x)$
-2	—
-1	—
0	—
1	0
2	$0{,}7$
$0{,}5$	$-0{,}7$
3	$1{,}1$
$0{,}1$	$-2{,}3$
5	$1{,}6$

$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

zéro : 1

signe :

x	0		1	
$sgn(f)$	$\|\|$	$-$	0	$+$

$\lim_{x \to 0_+} \ln(x) = -\infty \Rightarrow$ AV : $x = 0$

Exemples

Ex 2 (feuille) : ED, zéro(s) et signe

a) $f(x) = \ln(2-4x)$

cond : $2-4x > 0$
$2 > 4x$
$\frac{1}{2} > x$

$ED(f) = \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[$

zéro : $\ln(2-4x) = 0 \iff 2-4x = 1$

$\iff x = \frac{1}{4}$

signe :

x		$1/4$		$1/2$	
$sgn(f)$	$+$	0	$-$		//////

$f(0)$ $f(0{,}3)$

Il faut tester une valeur dans chaque intervalle

b) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+x}}$

cond : $x^2+x \geq 0$

x		-1		0	
$sgn(x^2+x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$ED(f) = \left]-\infty ; -1\right] \cup \left[0 ; +\infty\right[$

zéro : aucun car $e^{u(x)} > 0$

signe :

x		-1		0	
$sgn(f)$	$+$		//////		$+$

Autres exemples : ED, zéro(s), signe

1) $f(x) = x\ln(x) - x$ $\qquad$ cond : $x > 0$

$ED(f) = \mathbb{R}^*_+$

zéros : $x\ln(x) - x = 0 \iff x(\ln(x) - 1) = 0$

$\iff \begin{pmatrix} x = 0 \\ \notin ED(f) \end{pmatrix}$ ou $\ln(x) = 1$

$x = e \in ED(f)$

signe :

x	0		e	
$sgn(f)$	$\|\|$	$-$	0	$+$

$f(1) = -1$ $\qquad$ $f(3) \cong 0{,}3$

2) $f(x) = x \cdot e^{1/x}$ $\qquad$ cond : $x \neq 0$

$ED(f) = \mathbb{R}^*$

zéro : $x \cdot \underbrace{e^{1/x}}_{>0} = 0$: aucun zéro

$0 \notin ED(f)$

signe :

x		0	
$sgn(f)$	$-$	$\|\|$	$+$