## 2.4 Limites de fonctions

Soit $f$ définie par $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2-6x+8}$ cond : $x^2-6x+8 \neq 0$

$(x-2)(x-4) \neq 0$

$ED(f) = \mathbb{R} - \{2;4\}$

But : étudier le comportement d'une fonction au voisinage d'une valeur interdite ou pour des valeurs de $x$ s'approchant de $-\infty$ et $+\infty$

Graphiquement pour des valeurs $x$ proche de 2, il semble que la fonction s'approche de $-\frac{5}{2}$ mais $(2;-\frac{5}{2})$ n'est pas sur le graphe de $f$.

On a $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-6x+8} = \dfrac{(x+3)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-4)} = \dfrac{x+3}{x-4}$

On définit une nouvelle fonction $g(x) = \dfrac{x+3}{x-4}$, $ED(g) = \mathbb{R} - \{4\}$

2 n'est pas une valeur interdite de $g$, on peut calculer $g(2) = \dfrac{2+3}{2-4} = \dfrac{5}{-2} = -\dfrac{5}{2}$

On appelle $g$ la prolongée par continuité de $f$, elle nous permet de calculer la valeur limite de $f$ lorsque $x = 2$, on note

$$\underbrace{\lim_{x \to 2} f(x)}_{} = \lim_{x \to 2} \frac{x+3}{x-4} = g(2) = -\frac{5}{2}$$

on dit : " limite quand $x$ tend vers 2 de $f(x)$ "

On dit que $(2;-\frac{5}{2})$ est un " trou " du graphe de $f$.

Rem : . D'une manière générale on utilise le calcul de limite pour $a \notin ED(f)$ avec $a$ au bord de $ED(f)$ ou au milieu de $ED(f)$.

. Si $a \in ED(g)$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$

Exemples : 1) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2+4x+3}{x^3-9x} = \frac{9-12+3}{-27+27} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

1e étape : remplacer x par −3

c'est une forme indéterminée (f.i.)

$= \lim\limits_{x \to -3} \frac{\cancel{(x+3)}(x+1)}{x\cancel{(x+3)}(x-3)}$

2e étape : factoriser pour obtenir la prolongée par continuité

$= \lim\limits_{x \to -3} \frac{x+1}{x(x-3)}$

3e étape : reprendre la 1e étape

$= \frac{-3+1}{-3(-3-3)} = \frac{-2}{18} = -\frac{1}{9}$

$\Rightarrow \left(-3; -\frac{1}{9}\right)$ est un "trou" car $-3 \notin ED(f)$

2) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2+9} \overset{1^{e}\,\text{ét.}}{=} \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ comme $2 \in ED(f) \Rightarrow (2; \sqrt{13})$ est un point du graphe

Ex 2.4.2 et 2.4.3

Reprenons la fonction $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2-6x+8}$ $\quad ED = \mathbb{R} - \{2;4\}$

et voyons ce qui se passe lorsque $x$ tend vers 4

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2+x-6}{x^2-6x+8} = \text{"}\frac{16+4-6}{0}\text{"} = \text{"}\frac{14}{0}\text{"} = \infty \begin{cases} \xrightarrow{x>4} +\infty \\ \xrightarrow{x<4} -\infty \end{cases}$$

$$\frac{14}{0{,}001} \simeq 14'000$$

$$\frac{14}{0{,}00001} \cong 1'400'000$$

$$\boxed{\text{"}\frac{\text{nbre} \neq 0}{0}\text{"} = \infty}$$

$$\text{"}\frac{0}{0}\text{"} \quad f.i.$$

Exemples

1) $$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2+2x+1} = \frac{-1+1}{1-2+1} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} \quad f.i.$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{(x+1)^{\cancel{2}}}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{x^2-x+1}{x+1} = \text{“}\frac{1+1+1}{0}\text{”} = \frac{3}{0} = \infty$$

2) $$\lim_{x\to -1} \left(\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{\underbrace{x^2-1}_{(x+1)(x-1)}}\right) = \text{“}\frac{-1}{0}\text{”} - \text{“}\frac{-2}{0}\text{”} = \text{“}\infty - \infty\text{”} \quad f.i$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{x(x-1) - (x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{x^2-x-x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{x^2-2x+1}{(x+1)(x-1)} = \text{“}\frac{1+2+1}{0}\text{”} = \text{“}\frac{4}{0}\text{”} = \infty$$