2.2.1 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 4 - 5x$

b) $f(x) = x^2 - x - 2$

c) $f(x) = (x+4)^2(2+x)$

d) $f(x) = -6x^3 + 11x^2 - 3x$

e) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

f) $f(x) = x^4 + 5x^2 - 36$

Comme toutes les fcts sont polynomiales $ED(f) = \mathbb{R}$

\+ Etude de signe :

a) zéro : $\frac{4}{5}$ signe :

x		$4/5$	
$sgn(f)$	$+$	0	$-$

($m = -5 < 0$ ↘)

b) zéros : $x^2 - x - 2 = 0 \iff (x-2)(x+1) = 0$ ou $\Delta = \dots$

$\underset{2}{(x-2)}\underset{-1}{(x+1)}$

signe :

x		-1		2	
$sgn(f)$	$+$	0	$-$	0	$+$

($a = 1 > 0$ U)

c) zéros : $(x+4)^2(2+x) = 0 \iff x = -4$ (2) et $x = -2$

signe :

x		-4		-2	
$sgn(f)$	$-$	0 (2)	$-$	0	$+$

$f(1000)$: $+ \cdot + = +$

d) zéros : $-6x^3 + 11x^2 - 3x = 0$

$\iff x(-6x^2 + 11x - 3) = 0$ $\Delta = 49$

$\iff x = 0$ ou $x_{1,2} = \frac{-11 \pm 7}{-12} = \frac{1}{3}$; $\frac{3}{2}$

signe :

x		0		$1/3$		$3/2$	
$sgn(f)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$f(1000)$: $-$

e) zéros : $x^3+2x^2-4x-8=0$

$\Leftrightarrow \quad x^2(x+2)-4(x+2)=0$

$\Leftrightarrow \quad (x+2)(x^2-4)=0$

$\Leftrightarrow \quad (x+2)(x+2)(x-2)=0$

$\Leftrightarrow \quad (x+2)^2(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad \underset{(2)}{x=-2}$ ou $x=2$

signe :

x		-2		2	
sgn(f)	$-$	0 (2)	$-$	0	$+$

$f(1000)$: $+$

f) zéros : $x^4+5x^2-36=0$

chgmt de variable, on pose $y=x^2$ ⊛

$\Rightarrow \quad y^2+5y-36=0$

$\Leftrightarrow \quad (y+9)(y-4)=0$

$\overset{⊛}{\Rightarrow} \quad (x^2+9)(x^2-4)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(x^2+9)}_{>0}(x+2)(x-2)=0$

$\Leftrightarrow \quad x=-2$ ou $x=2$

signe :

x		-2		2	
sgn(f)	$+$	0	$-$	0	$+$

$f(1000)$: $+$

Ex 2.2.2 ED(f) + signe

a) $f(x) = \dfrac{x(x+4)}{3-2x}$ cond : $3-2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2}$ (v.i.)

$ED(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$

zéro : $x(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -4$

signe :

x		-4		0		$3/2$	
sgn(f)	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$-$

$f(1000) : \frac{+}{-} = -$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{16-x^2}$ cond : $16-x^2 \neq 0 \Leftrightarrow (4+x)(4-x) \neq 0$
$\Leftrightarrow x \neq -4$ et $x \neq 4$
(v.i)

$ED(f) = \mathbb{R} - \{\pm 4\}$

zéro : $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

signe :

x		-4		0		4	
sgn(f)	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$

$f(1000) : \frac{+}{-} = -$

c) $f(x) = \dfrac{(x+2)^2(x+1)}{x^2+x}$ cond : $x^2+x \neq 0 \Leftrightarrow x(x+1) \neq 0$
$\Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq -1$
(v.i.)

$ED(f) = \mathbb{R}^* - \{-1\}$

zéros : $(x+2)^2(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = -1$
(2) (2)

signe :

x		-2		-1		0	
sgn(f)	$-$	0 (2)	$-$	$\|$ (2)	$-$	$\|$	$+$

$f(1000) : \frac{+ \cdot +}{+} = +$

d) $f(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x}$ zéros : -1 et 1

v.i. : 0

$ED(f) = \mathbb{R}^*$

signe :

x		-1		0		1	
sgn(f)	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$

$f(1000) : \frac{+}{+}$

e) $f(x) = \frac{1}{x-5} + \frac{3}{x+1} = \frac{x+1 + 3(x-5)}{(x-5)(x+1)} = \frac{4x-14}{(x-5)(x+1)} = \frac{2(2x-7)}{(x-5)(x+1)}$

$ED(f) = \mathbb{R} - \{-1 ; 5\}$

zéros : $2x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$

signe :

x		-1		$7/2$		5	
sgn(f)	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$

$f(1000) : \frac{+}{+}$

f) $f(x) = \frac{-5(4-x)^2}{(1-x^2)(2-x)}$ cond : $(1-x^2)(2-x) \neq 0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x)(2-x) \neq 0$

$\downarrow -1 \quad \downarrow 1 \quad \downarrow 2 \quad$ (v.i)

$ED(f) = \mathbb{R} - \{-1 ; 1 ; 2\}$

zéro : $-5(4-x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ (2)

signe :

x		-1		1		2		4	
sgn(f)	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	0 (2)	$-$

$f(1000) : \frac{- \cdot +}{- \cdot -} = \frac{-}{+} = -$

Ex 2.2.3

a) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

cond : $x^2+x+1 \geq 0$ $\Delta = -3 < 0$ pas de zéro

x	
x^2+x+1	$+$

car $a = 1 > 0$

$ED(f) = \mathbb{R}$

pas de zéro

signe :

x	
$sgn(f)$	$+$

b) $f(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{x-5}$

cond : $x-1 \geq 0$ <u>et</u> $x-5 \geq 0$

$\underbrace{x \geq 1 \text{ et } x \geq 5}$

$\Rightarrow x \geq 5$

$ED(f) = [5;+\infty[$

zéro : $x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \notin ED(f)$

$x-5=0 \Leftrightarrow x=5 \in ED(f)$

signe :

x		5	
$sgn(f)$		0	$+$

c) $f(x) = \sqrt{(x-1)(x-5)}$

cond : $(x-1)(x-5) \geq 0$

x		1		5	
$(x-1)(x-5)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$ED(f) =]-\infty;1] \cup [5;+\infty[$

zéros : $\sqrt{(x-1)(x-5)} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=5$

signe :

x		1		5	
$sgn(f)$	$+$	0		0	$+$

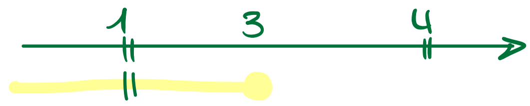
d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{6-2x}}{x^2-5x+4} = \dfrac{\sqrt{2(3-x)}}{(x-1)(x-4)}$ zéro

V.I. 1 et 4

cond : $2(3-x) \geqslant 0$ et $x \neq 1$ et $x \neq 4$

$3-x \geqslant 0$

$3 \geqslant x$



$\Rightarrow ED(f) =]-\infty ; 3] - \{1\}$

zéro de f : $\sqrt{6-2x} = 0 \Leftrightarrow 6-2x=0 \Leftrightarrow x=3$

signe :

x		1		3	
$sgn(f)$	$+$	$\|\|$	$-$	0	//////

$f(0) = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$: $+$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-4}}$ cond : $\dfrac{x+1}{x-4} \geqslant 0$

x		-1		4	
$\frac{x+1}{x-4}$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$

$\Rightarrow ED(f) =]-\infty ; -1] \cup]4 ; +\infty[$

zéro de f : $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-4}} = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

signe de f :

x		-1		4	
	$+$	0	//////	$\|\|$	$+$

f) $f(x) = \dfrac{x^2+7x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{x(x+7)}{\sqrt{(1+x)(1-x)}}$ cond : $\underbrace{1-x^2 \geqslant 0 \text{ et } \sqrt{1-x^2} \neq 0}_{1-x^2>0}$

x		-1		1	
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\Rightarrow ED(f) =]-1 ; 1[$

zéro de f : $x(x+7) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -7$

$x=0 \in ED(f)$; $x=-7 \notin ED(f)$

signe de f :

x		-1		0		1	
f	////	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	////

$f(-0{,}5)$: $\dfrac{0{,}25-3{,}5}{+} < 0$

Ex suppl.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}$$

cond : $x^2 - 1 \geq 0$ et $x \neq -2$

$(x+1)(x-1) \geq 0$

x		-1		1	
$\text{sgn}(x^2-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$ED(f) = \left]-\infty ; -2\right[\cup \left]-2 ; -1\right] \cup \left[1 ; +\infty\right[$$

zéros de f : $\sqrt{x^2-1} = 0 \iff x = \pm 1$

signe de f :

x		-2		-1		1	
$\text{sgn}(f)$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$/////$	0	$+$

Ex 2.2.5

a) $f(x) = \ln(7-2x)$

cond : $7 - 2x > 0$

$\downarrow$

$\frac{7}{2}$

x		$7/2$	
$7-2x$	$+$	0	$-$

$\Rightarrow ED(f) = \left]-\infty ; \frac{7}{2}\right[$

b) $f(x) = e^{x-1}$ $\quad ED(f) = \mathbb{R}$ car aucune opération interdite

c) $f(x) = \frac{3-x}{1-\log(x)}$

cond : $1 - \log(x) \neq 0$ et $x > 0$

$1 \neq \log(x)$

$10 \neq x$

$\Rightarrow ED(f) = \mathbb{R}_+^* - \{10\}$

d) $f(x) = 3^{\frac{1}{x+2}}$

cond : $x + 2 \neq 0 \iff x \neq -2$

$ED(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

Ex 2.2.6

a) $f(x) = 3 \qquad g(x) = x^2 \qquad ED(f) = \mathbb{R} \quad ED(g) = \mathbb{R}$

$(f+g)(x) = 3 + x^2 \qquad ED(f+g) = \mathbb{R}$

$(f-g)(x) = 3 - x^2 \qquad ED(f-g) = \mathbb{R}$

$(f \cdot g)(x) = 3x^2 \qquad ED(f \cdot g) = \mathbb{R}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3}{x^2} \qquad ED\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R}^*$

b) $f(x) = \frac{2x}{x-4} \qquad ED(f) = \mathbb{R} - \{4\}$

$g(x) = \frac{x}{x+5} \qquad ED(g) = \mathbb{R} - \{-5\}$

$(f+g)(x) = \frac{2x}{x-4} + \frac{x}{x+5} = \dots = \frac{3x^2+6x}{(x-4)(x+5)} \qquad ED(f+g) = \mathbb{R} - \{-5; 4\}$

$(f-g)(x) = \frac{2x}{x-4} - \frac{x}{x+5} = \dots = \frac{x^2+14x}{(x-4)(x+5)} \qquad ED(f-g) =$ "

$(f \cdot g)(x) = \frac{2x}{x-4} \cdot \frac{x}{x+5} = \frac{2x^2}{(x-4)(x+5)} \qquad ED(f \cdot g) =$ "

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\frac{2x}{x-4}}{\frac{x}{x+5}} = \frac{2x}{x-4} \cdot \frac{x+5}{x} = \frac{2x(x+5)}{x(x-4)} \qquad ED\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R}^* - \{-5; 4\}$

c) $f(x) = \sqrt{x} \qquad ED(f) = \mathbb{R}_+$

$g(x) = \sqrt{4x} \qquad ED(g) = \mathbb{R}_+$

$(f+g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4x} = \sqrt{x} + 2\sqrt{x} = 3\sqrt{x} \qquad ED(f+g) = \mathbb{R}_+$

$(f-g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{4x} = \sqrt{x} - 2\sqrt{x} = -\sqrt{x} \qquad ED(f-g) =$ "

$(f \cdot g)(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{4x} = \sqrt{4x^2} = 2x \qquad ED(f \cdot g) =$ "

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x}} = \sqrt{\frac{x}{4x}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \qquad ED\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R}_+^*$$

Ex 2.2.7

$f(x) = 2x \qquad g(x) = 2x-1 \qquad h(x) = x^2 \qquad ED = \mathbb{R}$

a) $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x-1) = 2(2x-1) = \underline{4x-2}$

b) $(h\circ f)(x) = h(f(x)) = h(f(x)) = h(2x) = (2x)^2 = \underline{4x^2}$

c) $(g\circ h\circ f)(x) = g(h(f(x))) = g(h(2x)) = g(4x^2) = 2(4x^2)-1 = \underline{8x^2-1}$

Ex 2.2.8

a) $f(x) = x^2-3x \qquad g(x) = \sqrt{x+2} \qquad ED(f) = \mathbb{R} \qquad ED(g) = [-2;+\infty[$

- $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+2}) = (\sqrt{x+2})^2 - 3\sqrt{x+2} = \underline{x+2-3\sqrt{x+2}}$

  $\underline{ED(f\circ g) = [-2;+\infty[}$

- $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2-3x) = \underline{\sqrt{x^2-3x+2}}$

  ED : cond : $x^2-3x+2 \geq 0$

  $(x-2)(x-1) \geq 0$

x		1		2	
$\operatorname{sgn}(x^2-3x+2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow \underline{ED(g\circ f) =]-\infty;1] \cup [2;+\infty[}$