Produit scalaire de deux vecteurs

Déf : Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le nombre réel :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \underbrace{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}_{\text{c'est un nombre}}}$$

⚠ $\neq \begin{pmatrix} u_1 \cdot v_1 \\ u_2 \cdot v_2 \end{pmatrix}$ pas un vecteur

Exple : $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 5 = -8 + 15 = 7$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + 7 = -4 - 3 + 7 = 0$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{c} + \vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} = -12 + 12 = 0$$

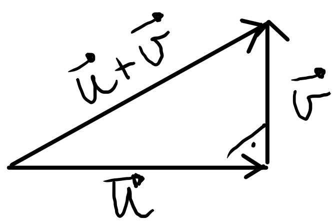
Propriété : critère d'orthogonalité

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}}$$

orthogonal : perpendiculaire ou 1 des vecteurs est nul.

preuve : Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ non nuls

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \quad \text{(Pythagore)}$$



$$\iff \left(\cancel{\sqrt{(u_1+v_1)^2 + (u_2+v_2)^2}}\right)^{\cancel{2}} = \left(\cancel{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}\right)^{\cancel{2}} + \left(\cancel{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}\right)^{\cancel{2}}$$

$$\iff \cancel{u_1^2} + 2u_1v_1 + \cancel{v_1^2} + \cancel{u_2^2} + 2u_2v_2 + \cancel{v_2^2} = \cancel{u_1^2} + \cancel{u_2^2} + \cancel{v_1^2} + \cancel{v_2^2}$$

$$\iff 2u_1v_1 + 2u_2v_2 = 0$$

$$\iff 2(u_1v_1 + u_2v_2) = 0 \qquad |\div 2$$

$$\iff u_1v_1 + u_2v_2 = 0$$

$$\iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

CQFD #