Relativement à un repère orthonormé du plan on donne les points et les vecteurs suivants :

$$A(-3;1) \qquad B(0;5) \qquad C(1;-2) \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.
Calculer la valeur des expressions suivantes :

a) $\|\vec{u} + 2\vec{v}\| =$

b) $\overrightarrow{AB} \bullet \vec{w} =$

c) $(\vec{u} \bullet \vec{v}) \cdot \vec{w} =$

d) $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet \vec{w} =$

e) $\|\overrightarrow{AC}\| + \vec{v} \bullet \vec{w} =$

f) $3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} =$

g) $\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| =$

Exercice 2.
Calculer le périmètre du triangle ABC.

Exercice 3.
Prouver que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas orthogonaux.

Exercice 4.

a) Donner un vecteur orthogonal au vecteur $\vec{u}$ et de même longueur.

b) Donner un vecteur orthogonal au vecteur $\vec{u}$ et de longueur triple.

Nom ......Corrigé...................... Prénom ....

TEST formatif - Géométrie - §1.4

Pour tous les exercices indiquer le détail complet des calculs et du raisonnement.

Relativement à un repère orthonormé du plan on donne les points et les vecteurs suivants :

$$A(-3;1) \qquad B(0;5) \qquad C(1;-2) \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.
Calculer la valeur des expressions suivantes :

a) $\|\vec{u} + 2\vec{v}\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{144+9} = \underline{\underline{\sqrt{153} = 3\sqrt{17}}}$

b) $\overrightarrow{AB} \bullet \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = -9 + 28 = \underline{\underline{19}}$

c) $(\vec{u} \bullet \vec{v})\, \vec{w} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = (10+0)\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -30 \\ 70 \end{pmatrix}}}$

d) $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet \vec{w} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = -21 - 21 = \underline{\underline{-42}}$

e) $\|\overrightarrow{AC}\| + \vec{v} \bullet \vec{w} = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \sqrt{16+9} + (-15+0) = 5 - 15 = \underline{\underline{-10}}$

f) $3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} = 3\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+3 \\ -9+4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 15 \\ -5 \end{pmatrix}}}$

g) $\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\| = \sqrt{4+9}\ \sqrt{25+0} = \underline{\underline{5\sqrt{13}}}$

$A(-3;1)$ $B(0;5)$ $C(1;-2)$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Exercice 2.
Calculer le périmètre du triangle ABC.

$\|\overrightarrow{AB}\| = \left\|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{9+16} = 5$

$\|\overrightarrow{AC}\| = \left\|\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{16+9} = 5$

$\|\overrightarrow{BC}\| = \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ périmètre $= 10 + 5\sqrt{2} \cong \underline{\underline{17,07 \text{ u}}}$

Exercice 3.
Prouver que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas orthogonaux.

$\overrightarrow{AB} \not\perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} = 3 - 28 = -25 \neq 0$

Exercice 4.

a) Donner un vecteur orthogonal au vecteur $\vec{u}$ et de même longueur.

$\vec{u}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ car $\vec{u} \bullet \vec{u}' = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 6 - 6 = 0$ et $\|\vec{u}\| = \|\vec{u}'\|$

$\Leftrightarrow \sqrt{4+9} = \sqrt{9+4} = \sqrt{1}$

ou $\vec{u}' = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ car . . . .

b) Donner un vecteur orthogonal au vecteur $\vec{u}$ et de longueur triple.

$\vec{u}'' = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$ car $\vec{u} \bullet \vec{u}'' = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} = 18 - 18 = 0$

et $\|\vec{u}''\| = \sqrt{81+36} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$

$= 3\|\vec{u}\|$

ou

$\vec{u}'' = 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix}$ car ...