Exercice 1.
On donne les points $A(-2;7)$, $B(1;5)$ et $C(4;16)$.

Calculer :

a) $2 \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OA}$ b) $\|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\|$ c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Exercice 2.
On donne les sommets d'un quadrilatère $PQRS$:

$$P(4;5) \qquad Q(13;2) \qquad R(-1;-5) \qquad S(-4;1)$$

a) Prouver que les côtés SP et RQ sont parallèles.

b) Prouver que le quadrilatère $PQRS$ est un trapèze rectangle.

Exercice 3.
On donne les points $A(2;1)$ et $B(3;-5)$.
Déterminer par calcul, les sommets C et D d'un carré $ABCD$ dont AB est un côté.

Exercice 4.
On donne deux sommets consécutifs d'un rectangle $ABCD$: $A(1;3)$ et $B(4;-4)$.

a) Calculer les coordonnées des autres sommets de ce rectangle (une seule solution suffit), sachant que la longueur du segment $[AB]$ vaut la moitié de celle du segment $[BC]$.

b) Calculer l'aire de ce rectangle.

c) Déterminer la valeur de l'angle aigu formé par les diagonales de ce rectangle.
Note : prendre $C(18;2)$ et $D(15;9)$ comme sommets si vous n'avez pas répondu à la question a).

Ex 1

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-(-2) \\ 5-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

a) $2\vec{AB} - \vec{OA} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 8 \\ -11 \end{pmatrix}}$

b) $\| \vec{BC} - \vec{AB} \| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{0^2 + 13^2} = \sqrt{169} = \underline{13}$

c) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \cdot 6 + (-2) \cdot 9 = 18 - 18 = \underline{0}$

Ex 2

a) $\vec{SP} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{RQ} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix}$

Comme $\det(\vec{SP} ; \vec{RQ}) = \begin{vmatrix} 8 & 14 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 8 \cdot 7 - 4 \cdot 14 = 0$

alors $\vec{SP}$ et $\vec{RQ}$ sont colinéaires. Donc $SP \parallel RQ$

b) Par a) on sait déjà qu'il s'agit d'un trapèze.

Il suffit de prouver qu'il possède un angle droit.

$\vec{RS} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{SP} \cdot \vec{RS} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 8 \cdot (-3) + 4 \cdot 6 = -24 + 24 = 0$

Donc $\vec{SP} \perp \vec{RS}$, il s'agit bien d'un trapèze rectangle.

Exercice 3

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ -5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

On cherche un vecteur $\vec{BC}$ orthogonal à $\vec{AB}$ et de même norme $\Rightarrow \vec{BC} = \pm \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

On pose $C(x ; y)$,

$\vec{BC} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-3 = 6 \\ y+5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow \underline{C_1(9 ; -4)}$

ou $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y+5 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-3=-6 \\ y+5=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-6 \end{cases} \Rightarrow \underline{C_2(-3;-6)}$

Comme un carré est un //gramme : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

On pose $D(u;v)$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} u-2 \\ v-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u-2=6 \\ v-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=8 \\ v=2 \end{cases} \Rightarrow \underline{D_1(8;2)}$$

ou $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} u-2 \\ v-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u-2=-6 \\ v-1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=-4 \\ v=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{D_2(-4;0)}$

<u>Rem.</u> On peut aussi trouver C et D en utilisant $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}$ comme à l'ex 4 a).

<u>Exercice 4</u>

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ -4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et de longueur double $\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \pm 2\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{cases} \xrightarrow{+} \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{C_1(18;2)} \\ \xrightarrow{-} \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{C_2(-10;-10)} \end{cases}$$

Comme un rectangle est un //gramme : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{cases} \xrightarrow{+} \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow D_1(15;9) \\ \xrightarrow{-} \begin{pmatrix} -13 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow D_2(-13;-3) \end{cases}$$

<u>Rem.</u> On peut aussi trouver C et D en posant $C(x;y)$ et $D(u,v)$ comme à l'ex 3.

Calculs avec C_1 et D_1 (résultats identiques avec C_2 et D_2)

b) $\text{Aire} = \left|\det\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC_1}\right)\right| = \left|\begin{vmatrix} 3 & 14 \\ -7 & 6 \end{vmatrix}\right| = \left|3 \cdot 6 - (-7) \cdot 14\right| = \left|18 + 98\right|$

$= 116\ u^2$

c) Angle entre les diagonales = angle entre $\overrightarrow{AC_1} = \begin{pmatrix} 17 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD_1} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix}$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{17 \cdot 11 - (-1) \cdot 13}{\sqrt{17^2 + 1^2}\sqrt{11^2 + 13^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{174}{290}\right) \cong 53{,}13°$$