Asymptotes

On appelle asymptote une droite dont le graphe de la fonction s'approche de plus en plus au voisinage d'une v.i. ou au voisinage de ∞.

AV : une droite d'équation $x = a$ est une AV si

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad , \text{ avec } a \text{ une v.i.}$$

Rem : si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = n$, n un nbre $\neq \infty$, alors $(a;n)$ est un "trou"

AH : une droite d'équation $y = b$ est une AH si

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

Exples : Déterminer les asymptotes de f :

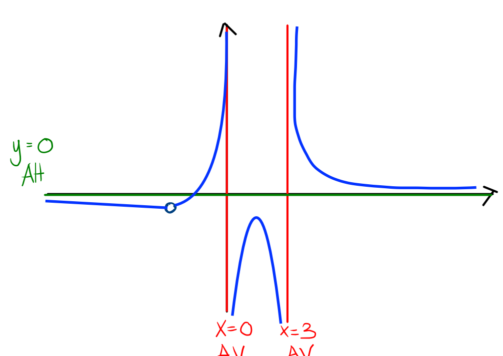
a) $f(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{x^3-9x} = \dfrac{(x+3)(x+1)}{x(x+3)(x-3)}$ $\qquad ED(f) = \mathbb{R}^* - \{-3;3\}$

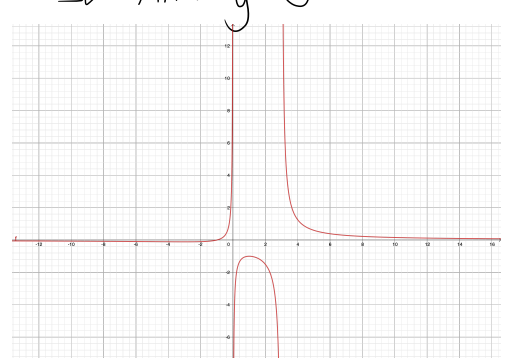
AV/trou : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \text{“}\dfrac{3}{0}\text{”} = \infty \implies$ AV : $x = 0$

$\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \text{“}\dfrac{0}{0}\text{”} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+1}{x(x-3)} = \dfrac{-2}{-3\cdot(-6)} = \dfrac{-2}{18} = \dfrac{-1}{9} \implies$ "trou" $(-3;\frac{-1}{9})$

$\lim\limits_{x \to +3} f(x) = \dfrac{6\cdot4}{3\cdot6\cdot0} = \text{“}\dfrac{24}{0}\text{”} = \infty \implies$ AV : $x = 3$

AH : $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\cancel{x^2}^{\,1}}{\cancel{x^3}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\infty} = 0 \implies$ AH : $y = 0$





b) $f(x) = \dfrac{2x^2+7x+3}{\underbrace{x^2+x+6}_{\Delta = -23 < 0}}$ pas de v.i. $ED(f) = \mathbb{R}$

AV / non

AH : $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 2$ AH : $y = 2$

Ex :

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$

b) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

c) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-x}{5x-x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{3x^2-4x+2}{x-1}$