Calcul de limites

Rappel : Soit $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x-2}$ $\qquad ED(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{(x-2)}} = 3 \Rightarrow (2;3) \text{ “trou”}$$

f.i.

Calculons $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{e^{x-2}-1} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”}$ impossible de simplifier la fraction

f.i.

Thm de Bernoulli - L'Hospital

Sous les conditions suivantes :

1) f et g sont dérivables au voisinage a

2) $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ ou ... $= \pm\infty$

3) g' ne s'annule pas au voisinage de a

4) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe

Alors
$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \underset{BH}{=} \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

⚠ $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \neq \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$

Rem : • la règle reste valable si $a = \pm\infty$

• On peut appliquer plusieurs fois BH.

Exples :

1) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{e^{x-2}-1} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} \underset{B.H.}{=} \lim_{x\to 2} \frac{2x}{e^{x-2}} = \frac{4}{e^0} = 4$$

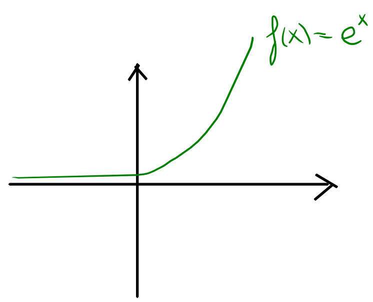
2) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \underset{f.i.}{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}$$

simplifier ... $= 3$

$$\underset{B.H.}{=} \lim_{x\to 2} \frac{2x-1}{1} = 3$$

3) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \underset{f.i.}{\text{“}\frac{+\infty}{+\infty}\text{”}} \underset{B.H.}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \text{“}\frac{+\infty}{+\infty}\text{”} \underset{B.H.}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2}$$

$$= \frac{+\infty}{2} = +\infty$$



4) $$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

5) $$\lim_{x\to -\infty} x\cdot e^x = \underset{f.i.}{\text{“}-\infty\cdot 0\text{”}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{e^{+\infty}} = \underset{f.i.}{\text{“}\frac{-\infty}{+\infty}\text{”}}$$

$$\underset{B.H.}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-(+\infty)} = 0$$

6) $$\lim_{x\to 0_+} x^3 \ln(x) = \underset{f.i.}{\text{“}0\cdot(-\infty)\text{”}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^3}} = \text{“}\frac{-\infty}{+\infty}\text{”}$$

$$\underset{B.H}{=} \lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3x^{\cancel{2}}}{x^{\cancel{6}4}}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{1}{\cancel{x}}\cdot\left(-\frac{\cancel{x^4}^{\,x^3}}{3}\right) = \frac{0}{-3} = 0$$

ex 2.3.5 et 2.3.13