2.2 Sous-espace vectoriel : SEV

Définition : Soit $(E;+;\cdot)$ un EV et F un sous-ensemble de E, non vide.
F est un SEV de E si $(F;+;\cdot)$ est aussi un EV.

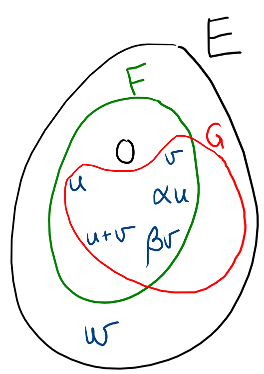
Propriétés : 1) F est un SEV si

a) $u+v \in F$, $\forall u,v \in F$ (stabilité de l'addition)

et

b) $\alpha\cdot u \in F$, $\forall u \in F$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (" de la multiplication)

2) l'élément neutre $0 \in F$



G n'est pas un SEV car $0 \notin G$

Rem :
- Pour prouver qu'un ensemble est un SEV on utilise 1) a) et b)
- " " " " n'est pas un SEV il suffit de trouver un contre-exple qui montre qu'une propriété (1a) ou 1b) ou 2)) n'est pas vérifiée.

Exples

1) $F = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$ est un SEV de $\mathbb{R}^2$ car

$F = \{(x;2x) \in \mathbb{R}^2\}$

Soit $(x;2x)$ et $(z;2z) \in F$, $\alpha \in \mathbb{R}$

a) $(x;2x) + (z;2z) = (x+z;\ 2x+2z) = (x+z;\ 2(x+z)) \in F$

b) $\alpha(x;2x) = (\alpha x;\ 2\alpha x) \in F$

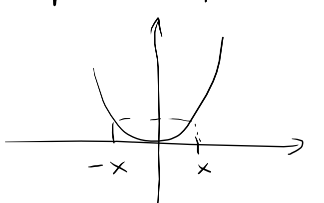
2) ex 1.2.6 a) $A = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 12\} = \{(12;y;z) \in \mathbb{R}^3\}$

n'est pas un SEV car $(\underset{\neq 12}{0};0;0) \notin A$

ou a) $(12;x;y) + (12;s;t) = (\underbrace{24}_{\neq 12};\ x+s;\ y+t) \notin A$

ou b) $\alpha(12;x;y) = (\underbrace{12\alpha}_{\neq 12};\ x;\ y)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

3) ex 1.2.7 a) rappel : f est une fct paire $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$



a) Soit f et g deux fcts paires

$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x) \Rightarrow f+g$ est paire

b) Soit f une fct paire et $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha f(-x) = \alpha f(x) \Rightarrow \alpha f$ est paire

$\Rightarrow$ SEV de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$

Ex 1.2.6 / 1.2.7 b) / 1.2.8 a)