2.3 Combinaisons linéaires, familles libres, familles liées

Soit $(E;+;\cdot)$ un EV, $u_1, u_2, \dots, u_n \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$n > 1$

Déf : $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$ est une combinaison linéaire de $u_1, u_2, \dots, u_n$.

Exples 1) Dans $\mathbb{R}_2[x]$, $5x^2+2x-3$ est une combinaison lin. de x^2, x et 1.

2) Dans $\mathcal{V}_2$, $\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}$ est une comb. lin. de $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

car $\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

mais également de $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ car $\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Déf :
- les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_n$ forment une famille libre ou sont linéairement indépendants si

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 .$$

- Les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_n$ forment une famille liée ou sont linéairement dépendants s'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0$.

Exple : Dans $\mathcal{V}_2$: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ sont liés

car $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Thm : $u_1, u_2, \dots u_n$ sont liés si et seulement si au moins un vecteur peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres

Exple (suite) : $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$ liés.

Exples : 1) Dans $\mathbb{R}^3$: $u_1=(0;1;-1)$ $u_2=(1;2;0)$ et $u_3(1;1;2)$ libres?

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$$ vecteur nul $(0;0;0)$

$$(\lambda_2+\lambda_3\ ;\ \lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3\ ;\ -\lambda_1+2\lambda_3) = (0;0;0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Rappel : si $\mathrm{Det}(A) \neq 0$
$\Rightarrow$ solution unique

$$\mathrm{Det}(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 1(2+1) + 2 = -1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ solution unique $\Rightarrow$ $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ $\Rightarrow$ libres

2) dans $\mathcal{M}_3$: $u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $u_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $u_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$ libres?

Non car $-u_1-u_3 = u_2$

variante : $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$

$$\begin{cases} 5\lambda_1 - 10\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{Det}(A) = \begin{vmatrix} 5 & -10 & 5 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \dots = 0$$

$\Rightarrow$ sol $(0;0;0)$ n'est pas unique $\Rightarrow$ liés.

3) Dans $\mathbb{R}_1[x]$: $p(x) = 5x+3$ et $q(x) = -2x+7$ libres?

$$\lambda_1 p(x) + \lambda_2 q(x) = 0$$

vecteur nul $= 0x+0$

$$5\lambda_1 x + 3\lambda_1 - 2\lambda_2 x + 7\lambda_2 = 0$$

$$(5\lambda_1 - 2\lambda_2)x + (3\lambda_1 + 7\lambda_2) = 0x + 0$$

$$\begin{cases} 5\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 7\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{Det}(A) = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 35+6 = 41 \neq 0 \Rightarrow \text{sol } (0;0) \text{ unique}$$

$\Rightarrow$ libres.

ex 1.2.12, 13 et 14 $\rightarrow$ d)

Ex 1.2.12

a) $\lambda_1(1;-1;1) + \lambda_2(0;2;-1) = (0;0;0)$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \checkmark \end{cases} \Longrightarrow \text{libres}$$

3 équ. 2 inc.
on résout 2 équa avec 2 inc. et on vérifie dans la dernière

ou Il n'existe pas $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $(1;-1;1) = \lambda(0;2;-1)$

$\lambda \cdot 0 = 0 \neq 1$

$\Longrightarrow$ pas liés $\Longrightarrow$ libres