Limite à l'infini

On étudie le comportement d'une fonction lorsque x devient infiniment grand.

On calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

Exple : $\lim\limits_{x \to \infty} (3x^2 + 2x + 1) = \lim\limits_{x \to \infty} 3x^2 = 3 \cdot \infty^2 = \infty$

On a le résultat : une fonction polynomiale se comporte à l'infini comme son terme de plus haut degré

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \to \infty} a_n x^n}$$

Exple : $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2+2x+1}{5x^2-25} \left(= \dfrac{\lim\limits_{x \to \infty}(3x^2+2x+1)}{\lim\limits_{x \to \infty}(5x^2-25)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to \infty} 3x^2}{\lim\limits_{x \to \infty} 5x^2} \right)$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3\cancel{x^2}}{5\cancel{x^2}} = \underbrace{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}_{f.i.} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

Pour les fractions rationnelles on applique le principe vu pour les polynômes au numérateur et au dénominateur

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}}$$

puis simplifier

Exples

1) $\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^3+3x^2-5x+7}{2x^2-5x+7} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\cancel{2}x^{\cancel{3}}}{\cancel{2}\cancel{x^2}} = \lim_{x\to\infty} -x = \infty$

2) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = \lim_{x\to\infty} 2 = 2$

3) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^3+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}}{x^{\cancel{3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \text{"}\frac{1}{\infty}\text{"} = 0$

principe du gâteau : $\frac{\text{"nbre} \neq 0\text{"}}{\infty} = 0$

Pour un nbre de gâteaux (différent de zéro)
plus le nombre d'invités est grand (-> infini)
plus les parts sont petites (-> zéro)

ex 2.4.16