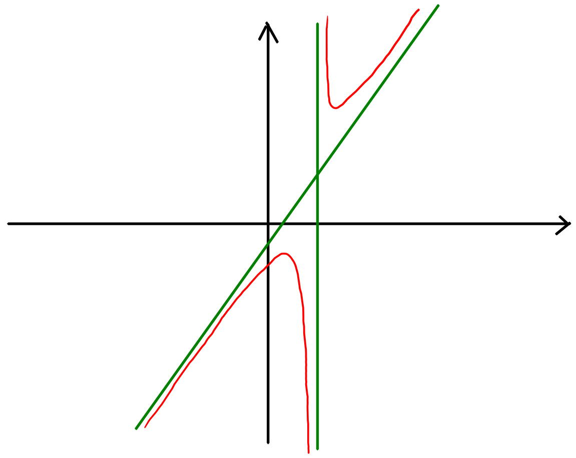
Asymptote oblique d'une fonction rationnelle

Dans l'ex. précédent on a vu que $f(x) = \dfrac{3x^2-4x+2}{x-1}$ (e)

n'avait pas d'AH mais en observant le graphe on voit



que la fonction s'approche à gauche et à droite d'une droite oblique : AO

Rappel

$$\begin{array}{rl|l} & 3x^2-4x+2 & x-1 \\ \hline - & 3x^2+3x & 3x-1 \\ \hline & -x+2 & \\ & +x\mp1 & \\ \hline & 1 & \end{array}$$

on s'arrête quand le degré du reste est plus petit que le degré du diviseur.

$$\begin{array}{r|l} 670 & 15 \\ \hline -60 & 44 \\ \hline 70 & \\ -60 & \\ \hline 10 & \end{array}$$

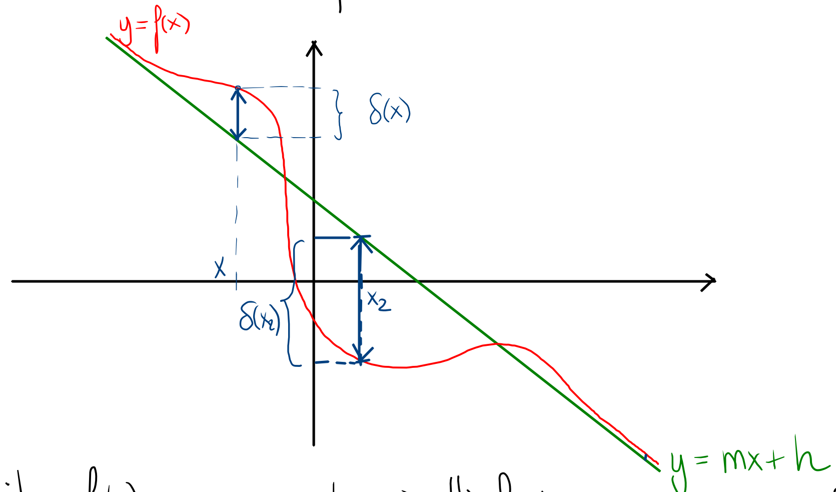
$670 = 15\cdot 44 + 10$

$\Rightarrow$ Egalité fondamentale :

$$3x^2-4x+2 = (x-1)(3x-1)+1 \qquad \Big| \div (x-1)$$

$$f(x) = \frac{3x^2-4x+2}{x-1} = 3x-1 + \frac{1}{x-1}$$

Déf : La droite $y = mx + h$ est une asymptote oblique de la courbe $y = f(x)$ si la différence entre les deux courbes tend vers 0 lorsque x tend vers ∞.



Autrement dit $f(x)$ se comporte à l'infini comme une droite et

$$f(x) = mx + h + \delta(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to \infty} \delta(x) = 0$$

En reprenant l'ex. $f(x) = 3x - 1 + \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\delta(x)}$

Comme $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{\infty} = 0$, alors $f(x)$ se comporte comme la droite $y = 3x - 1$ à gauche et à droite du graphe.

$y = 3x - 1$ est l'AO de f.

Pour une fonction $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ avec $\deg(N(x)) = \deg(D(x)) + 1$ il existe une AO d'équation $y = Q(x)$ où $Q(x)$ est le quotient de la division de $N(x)$ par $D(x)$.

Rem : 1) Une AH est une AO de pente nulle

2) Une courbe admet soit une AH soit une AO soit ni l'un ni l'autre.

3) Le graphe de f ne coupe jamais une AV mais peut couper une AH ou une AO.

Exemples 1) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + x + 2}{x^2 - 1} = \dfrac{(x-1)(2x+1)(x-2)}{(x+1)(x-1)}$ v.i : ± 1

$ED(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

. AV/trou : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(2x+1)(x-2)}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \dfrac{-3}{2}$

$\Rightarrow$ "trou" $\left(1 ; -\frac{3}{2}\right)$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \text{"}\dfrac{-6}{0}\text{"} = \infty \Rightarrow$ AV : $x = -1$

	2	-5	1	2
1		2	-3	-2
	2	-3	-2	0

$(x-1)(\underbrace{2x^2 - 3x - 2})$

$\Delta = 9 + 16 = 25$

$x_{1,2} = \dfrac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

$2(x-2)(x+\frac{1}{2}) = (x-2)(2x+1)$

. AH/AO : $\text{Deg}(N) \overset{?}{=} \text{Deg}(D) + 1$

$3 = 2 + 1$ ✓ $\Rightarrow$ AO

$$
\begin{array}{rl|l}
2x^3 - 5x^2 + x + 2 & & x^2 - 1 \\
\hline
-2x^3 \quad\quad + 2x & & 2x - 5 \\
\hline
-5x^2 + 3x + 2 & & \\
+5x^2 \quad\quad \mp 5 & & \\
\hline
3x - 3 & &
\end{array}
$$

$\Rightarrow f(x) = 2x - 5 + \dfrac{3x-3}{x^2-1}$

$\Rightarrow$ AO : $y = 2x - 5$

2) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x}{x^2+1}$ pas de v.i cond : $x^2+1 \neq 0$

$ED(f) = \mathbb{R}$

AV/ trou

AH/ AO $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 2 \Rightarrow$ AH : $y = 2$

3) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x}{x^3+1}$ v.i : $x^3+1 = (\underset{-1}{\underset{\downarrow}{x+1}})(x^2-x+1)$

$ED(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

AV/ trou : $\lim_{x\to -1} f(x) = \text{"}\dfrac{5}{0}\text{"} = \infty \Rightarrow$ AV : $x = -1$

AH/ AO : $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{2}{x} = \text{"}\dfrac{2}{\infty}\text{"} = 0 \Rightarrow$ AH : $y=0$

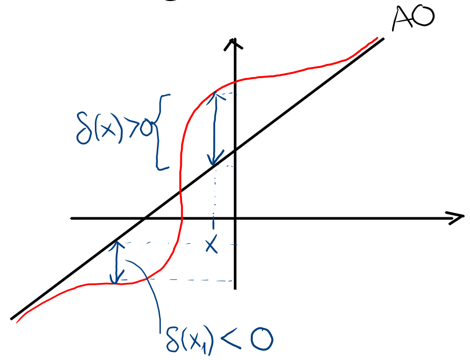
Critère pour une AH :

$Deg(N) \leq Deg(D)$

Position relative

1) Soit $f(x)$ une fonction avec $Deg(N) = Deg(D) + 1$,

alors $f(x) = \underbrace{mx + h}_{AO\,:\; y = mx+h} + \delta(x)$



L'étude de signe de $\delta(x)$ nous donne la position relative de $\underbrace{y = f(x)}_{fct}$ et de $\underbrace{y = mx + h}_{AO.}$:

$+$: $y = f(x)$ est au-dessus de l'AO

0 : $y = f(x)$ coupe l'AO

$-$: $y = f(x)$ est au-dessous de l'AO.

2) Pour une fonction avec une AH : $\delta(x) = f(x) - h$ avec $y = h$ l'équation de l'AH.

Ex 2.6.1

a) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-3;1\}$

2) zéros : -2 ~~et 1~~ et signe

x		-3		-2		1	
sgn(f)	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$ (2)	$+$

3) AV/trou ... $x = -3$ une AV $\quad \left(1; \frac{3}{4}\right)$ "trou"

AH : ... $y = 1$

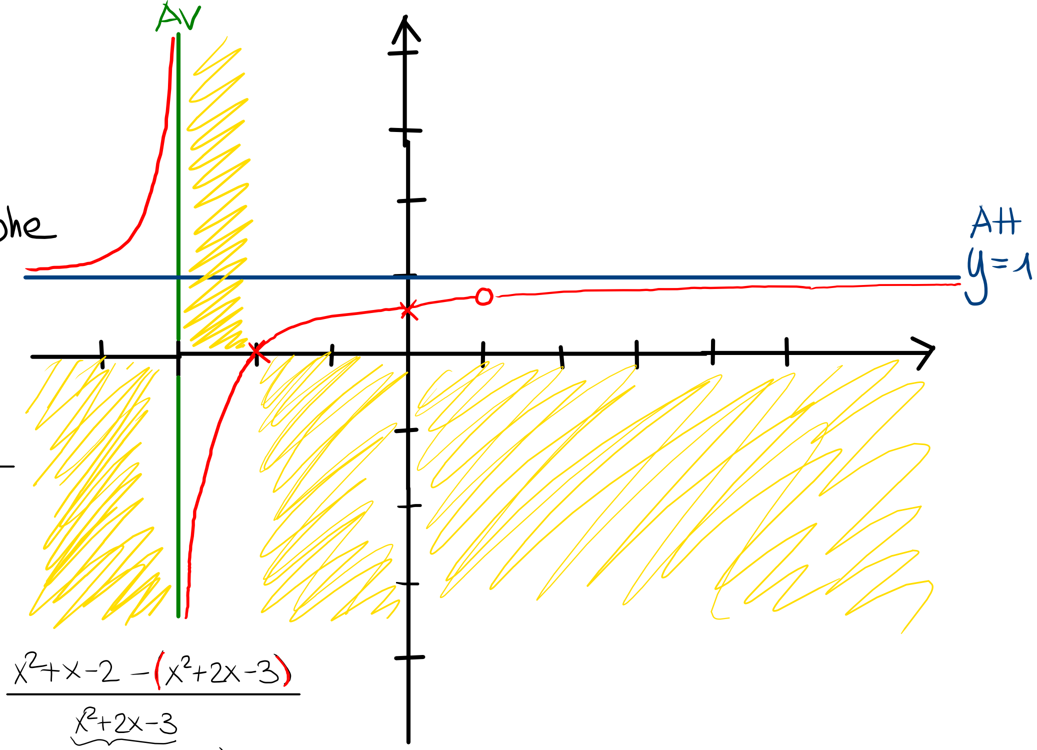
position relative : $\delta(x) = f(x) - 1 = \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} - 1 = \dfrac{x^2+x-2-(x^2+2x-3)}{\underbrace{x^2+2x-3}_{(x+3)(x-1)}}$

$\delta(x) = \dfrac{-x+1}{(x+3)(x-1)}$ $\quad$ zéro : (1) $\quad$ v.i. : -3 et 1 $\quad$ (2)

x		-3		1	
sgn(δ)	$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$ (2)	$-$
position relative	f au-dessus		f au-dessous		f au-dessous

← $\delta(1000)$: $\dfrac{-}{+}$

4) graphe



pt particulier : 0 à 0 : $f(0) = \frac{2}{3}$

Exple : $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-2x-3} = \frac{(x-1)\overbrace{(x^2+x+1)}^{\Delta<0}}{(x-3)(x+1)}$

zéro : 1

v.i. : -1 et 3

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-1;3\}$

2) signe :

x		-1		1		3	
f	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$

$f(1000) : \frac{+}{+}$

3) AV/trou :

$\lim_{x\to -1} f(x) = \text{“}\frac{-2}{0}\text{”} = \infty \Rightarrow$ AV : $x = -1$

$\lim_{x\to 3} f(x) = \text{“}\frac{26}{0}\text{”} = \infty \Rightarrow$ AV : $x = 3$

AH/AO : comme $\text{Deg}(N) = \text{Deg}(D) + 1$

$3 = 2 + 1$ ✓ $\Rightarrow$ AO

$$
\begin{array}{rl|l}
x^3 & \quad -1 & x^2-2x-3 \\
\cline{3-3}
-x^3+2x^2+3x & & x+2 \\
\cline{1-1}
2x^2+3x-1 & & \\
-2x^2+4x+6 & & \\
\cline{1-2}
7x+5 & &
\end{array}
$$

$\Rightarrow f(x) = x+2+\underbrace{\frac{7x+5}{x^2-2x-3}}_{=\delta(x)}$

$\Rightarrow$ AO : $y = x+2$

position : $\delta(x) = \frac{7x+5}{\underbrace{x^2-2x-3}_{(x-3)(x+1)}}$

zéro : $x = -\frac{5}{7}$

v.i. : 3 et -1

x		-1		$-5/7$		3	
$sgn(\delta)$	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$
	dessous	‖	dessus	$\cap$	dessous	‖	dessus

$\delta(1000) : \frac{+}{+}$

point d'intersection : $f\left(-\frac{5}{7}\right) = \frac{(-5/7)^3-1}{(-5/7)^2-2\cdot(-5/7)-3} \cong 1{,}3 = \frac{9}{7}$

$\Rightarrow I\left(-\frac{5}{7} ; \frac{9}{7}\right) \sim (-0{,}7 ; 1{,}3)$