

Ex 1

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x^3 + 3x^2}{x^2} \stackrel{\substack{\text{"0"} \\ \text{f.i.}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x^2 + x + 3)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x + 3) = \underline{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} \stackrel{\substack{\text{"0"} \\ \text{f.i.}}}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = -1-1 = \underline{-2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 8x - 9} = \frac{\text{"72"}}{0} = \underline{\infty}$$

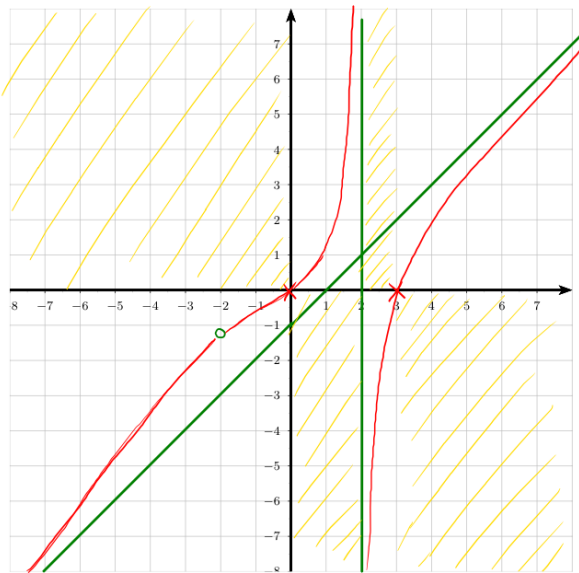
$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 7}{2x - 5x^3} \stackrel{\text{"088"}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3}{-5x^3} = \underline{-\frac{3}{5}}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2}{x^2 + 3x - 1} \stackrel{\text{"088"}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = \underline{+\infty}$$

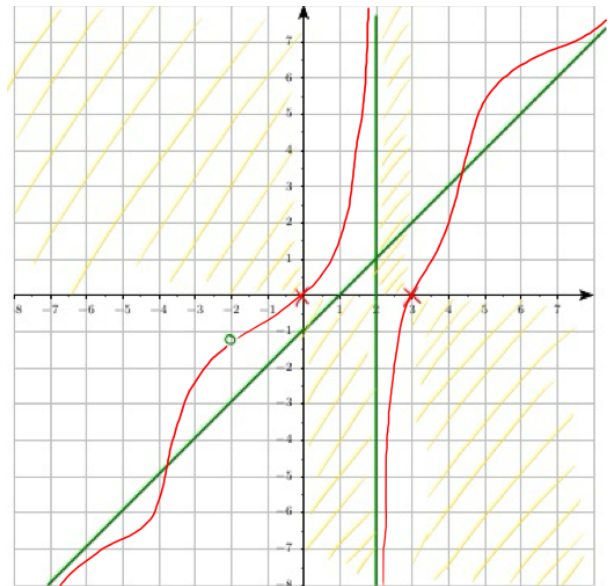
$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{3x^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overset{1}{x}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3x} = \frac{1}{\infty} = \underline{0}$$

Ex 2

par exemple :



ou



Ex 3

a) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x-3)(x-2)}$

← zéros: -2 (et 2)
 ← v.i.: 2 et 3 multiplicité 2

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{2; 3\}$

2) signe :

x	-2	2	3	
sgn(f)	+	0	-	+
		(2)	(2)	

← $f(1000): \frac{+}{+}$

3) asymptotes :

AV/hou : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-3} = \frac{4}{-1} = -4 \Rightarrow (2; -4)$ hou

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{\infty}{0} = \infty \Rightarrow x=3$ est une AV

AH/AO : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow y=1$ est une AH

pas demandé ici

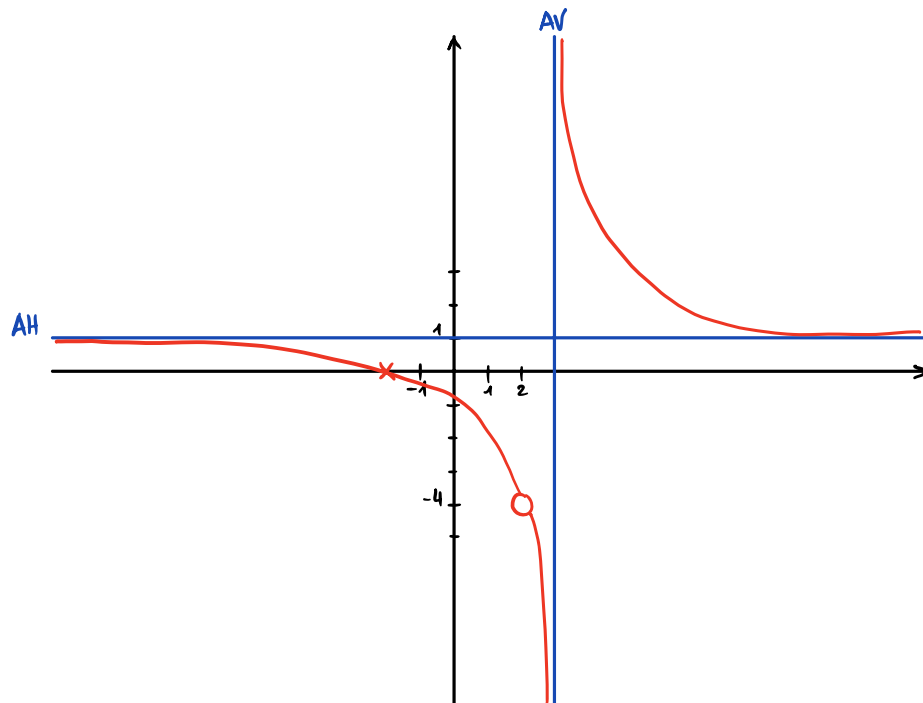
$S(x) = f(x) - 1 = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} - \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 6} = \frac{5x - 10}{x^2 - 5x + 6} = \frac{5(x-2)}{(x-3)(x-2)}$

← zéro: 2
 ← v.i.: 2 et 3 (2)

x	2	3	
sgn(S)	-	-	+
	(2)	(2)	

dessous | dessous | dessus

4) graphe :



b) $f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^2 + 2x + 1} \stackrel{(*)}{=} \frac{(x-1)(x+2)(x+3)}{(x+1)^2}$
 ← zéros : -3, -2 et 1
 ← V.i : -1 (2)

* numérateur : zéros possibles : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$$x=1 : 1+4+1-6 = 0 \quad \checkmark \Rightarrow \text{Horner:}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 4 & 1 & -6 \\ 1 & & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2+5x+6) = (x-1)(x+2)(x+3)$$

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{ -1 \}$

2) signe :

x	-3	-2	-1	1	
sgn(f)	-	0	+	0	+

(2)

$f(1000) : \frac{+}{+}$

3) asymptotes :

AV/lien : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{-4}{0} = \infty \Rightarrow \underline{x = -1 \text{ est une AV}}$

AH/AO : AO car $3 = 2 + 1$ ($\text{Deg}(N) = \text{Deg}(D) + 1$)

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 4x^2 + x - 6 & x^2 + 2x + 1 \\ -x^3 + 2x^2 + x & x+2 \\ \hline 2x^2 - 6 & \\ -2x^2 + 4x + 2 & \\ \hline -4x - 8 & \end{array} \Rightarrow f(x) = x+2 + \frac{-4x-8}{x^2+2x+1}$$

$$g(x) = \frac{-4x-8}{x^2+2x+1} = \frac{-4(x+2)}{(x+1)^2} \leftarrow \text{zéro} : -2$$

$$\leftarrow \text{v.i.} : -1 \text{ (2)}$$

x	-2	-1	
$\text{sgn}(s)$	$+$	0	$-$

(2)

position
de f p.r. à AO

dessus

dessous

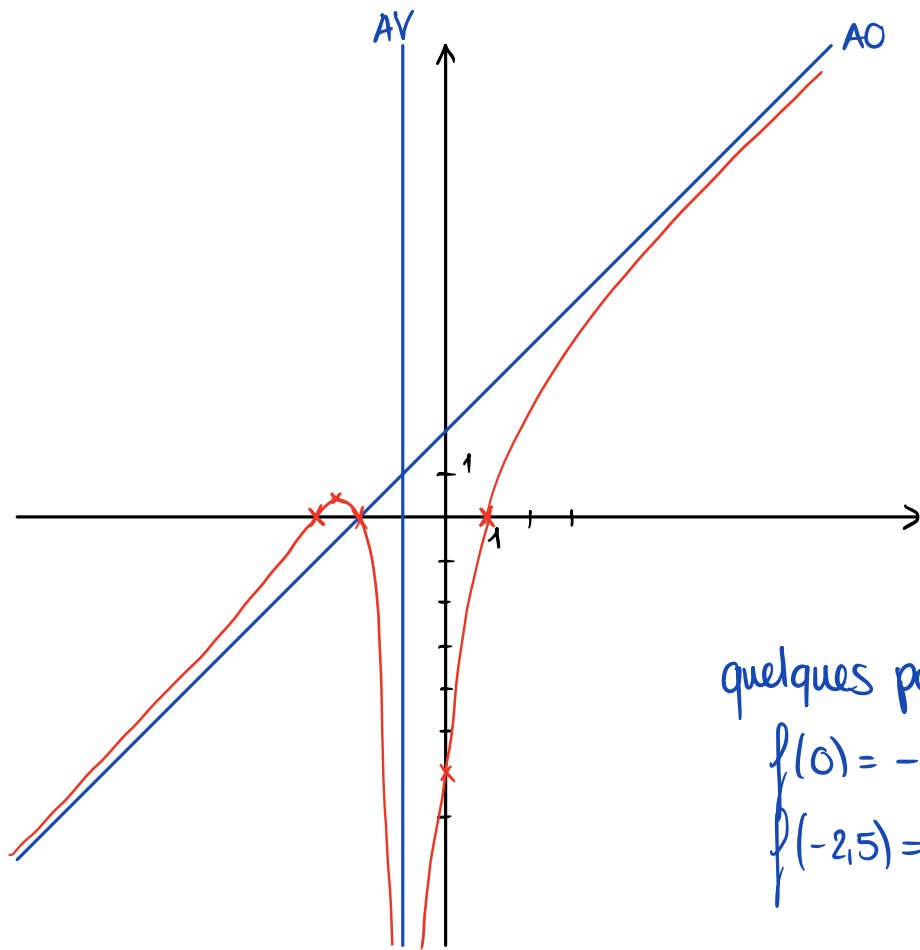
dessous

↓
coupe en $(-2; 0)$

$$y = -2 + 2 = 0$$

pas demandé
ici

4) graphe :



quelques points :

$$f(0) = -6$$

$$f(-2,5) = \frac{0,875}{2,25} = 0,3\bar{8}$$

Exercice 3

Pour les fonctions suivantes, on demande de déterminer

- l'ensemble de définition,
- le signe,
- les équations des asymptotes éventuelles et s'il existe un trou en donner les coordonnées,
- et le graphe.

a) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

b) $f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^2 + 2x + 1}$

Exercice 4

D'une fonction rationnelle f , on donne son étude de signe (ci-dessous) et l'équation de ses asymptotes : $x = 1$ et $y = 2$

x	-1		1		4		
$sgn(f)$	+	0	+		-	0	+

a) Vrai ou Faux ?

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{4\}$ **Faux** 4 est un zéro pas une v.i. ($ED(f) = \mathbb{R} - \{1\}$)

2) Il y a un zéro de multiplicité paire. **Vrai** en $x = -1$ car le signe de f est le même avant et après -1

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ **Faux** sinon il y aurait une AH d'équation $y = 1$

4) Le degré du numérateur et celui du dénominateur sont égaux. **Vrai** car il y a une AH d'équation $y = 2$

5) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$ **Vrai** car il y a une AV d'équation $x = 1$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^n}{x^n} = 2$)

b) D'après l'étude de signe et les équations des asymptotes, déterminer les limites suivantes.

1) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ } car AV $x = 1$

2) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ }

3) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$ ($= f(4)$)

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ (car AH)

c) Esquisser le graphe d'une fonction f qui pourrait admettre cette étude de signe et ces asymptotes.

d) Donner une fonction f qui pourrait admettre cette étude de signe et ces asymptotes.

par exemple : $f(x) = \frac{2(x+1)^2(x-4)}{(x-1)^3}$ ou $\frac{4(x+1)^2(x-4)^3}{2(x-1)^5}$

c) par exemple

