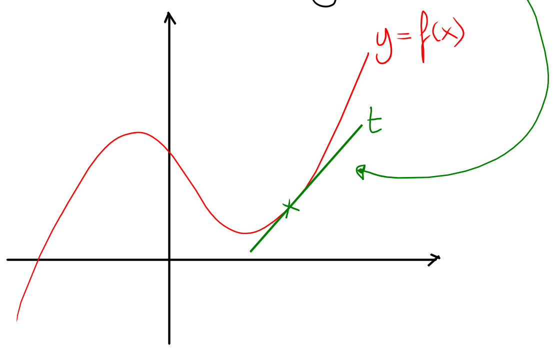
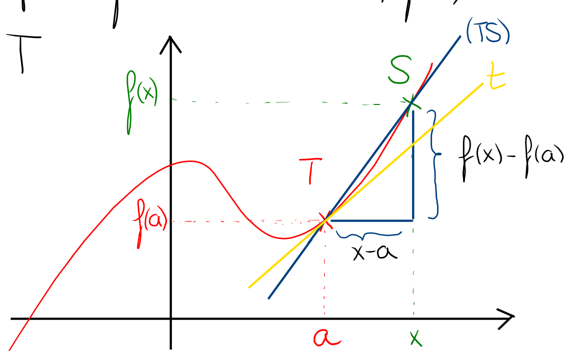
# Dérivée

But : connaître la croissance d'une fonction

Idée : étudier la pente de la tangente




Prenons $T(a; f(a))$ un point fixe et $S(x; f(x))$ un autre point variable avec $S$ proche de $T$




On considère la droite $(TS)$ : sa pente vaut : $m = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

En approchant $S$ de $T$ la droite $(TS)$ s'approche de $t$ la tangente à la courbe en $T$.

En prenant la limite quand $x$ tend vers $a$ de la pente $m$, on définit le nombre dérivé de $f$ en $a$, on note $f'(a)$

Autrement dit : $\boxed{f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}$

Interprétation géométrique : $f'(a)$ est la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point d'abscisse $a$

Exples: 1) $f(x) = x^2$ (ex 2.7.1)

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{\text{f.i.}}{=}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x+a)\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}} = \lim_{x \to a} (x+a) = a + a = 2a$$

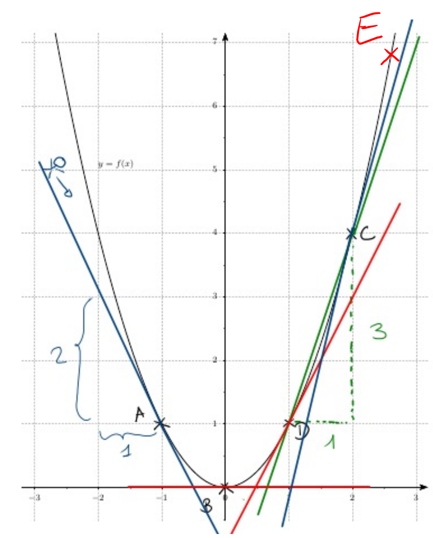
2.7.1 $A(-1;1) \Rightarrow m_A = f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$ ✓

$B(0;0) \Rightarrow m_B = f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$ ✓

$C(2;4) \Rightarrow m_C = f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ ✓

$D(1;1) \Rightarrow m_D = f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$ ✓

$E(2{,}5 ; \underset{\underset{2{,}5^2 = 6{,}25}{\parallel}}{f(2{,}5)}) \Rightarrow m_E = f'(2{,}5) = 2 \cdot 2{,}5 = 5$

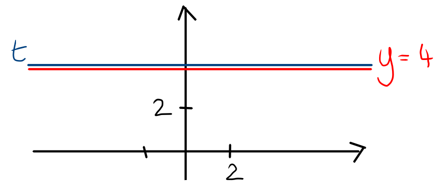



$f'(x) = 2x$ c'est la dérivée de $f(x) = x^2$

c'est une fonction.

2) 2.7.11 a) $f(x) = 4$

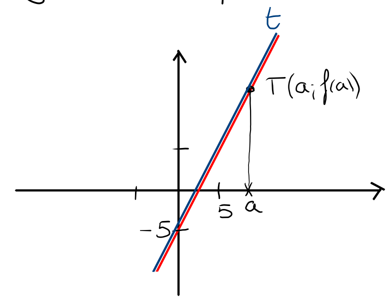
$f'(x) = 0$




la tangente à la courbe $y=4$ pour toutes les valeurs $a$ est la droite $y=4$ $\Rightarrow$ pente $= 0$

3) 2.7.11 b) $f(x) = 2x-5$

$f'(x) = 2$




ou avec calcul

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{2x-5-(2a-5)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{2x-2a}{x-a} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{2\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}} = 2$$

4) $f(x) = 3x^2 + 5x$

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{3x^2+5x-(3a^2+5a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{3x^2+5x-3a^2-5a}{x-a} \underset{\text{f.i.}}{\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to a} \frac{3(\overbrace{x^2-a^2}^{(x+a)(x-a)}) + 5(x-a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\cancel{(x-a)}[3(x+a)+5]}{\cancel{x-a}} = \lim_{x\to a} (3x+3a+5) = 3a+3a+5$$

$$= 6a+5$$

$\Rightarrow$ $f'(x) = 6x+5$

5) $f(x) = x^3$

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x-a} \underset{\text{f.i.}}{\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to a} \frac{\cancel{(x-a)}(x^2+ax+a^2)}{\cancel{x-a}}$$

$$= \lim_{x\to a} (x^2+ax+a^2) = a^2 + a\cdot a + a^2 = 3a^2$$

$\Rightarrow$ $f'(x) = 3x^2$

expe suite

6) $f(x) = x^4$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{x^4 - a^4}{x-a} \underset{\text{f.i.}}{\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x \to a} \frac{(x^2+a^2)(x+a)\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}}$$

$$= \lim_{x \to a} (x^2+a^2)(x+a) = (a^2+a^2)(a+a) = 2a^2 \cdot 2a = 4a^3$$

$\Rightarrow \quad f'(x) = 4x^3$

Règles de dérivation :

| | | |
|---|---|---|
| $(x^n)' = n x^{n-1}$ | | $n \in \mathbb{R}$ |
| $(k)' = 0$ | | $k \in \mathbb{R}$ |
| $(kx)' = k$ | | " |

Exples :

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)'} = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{1/2}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \left(x^{-1}\right)' = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = \boxed{-\frac{1}{x^2}}$$

Soit $u$ et $v$ deux fonctions de $x$ $\left(u(x) \text{ et } v(x)\right)$, $k \in \mathbb{R}$

1) $f'(x) = \left(k \cdot u(x)\right)' = \boxed{(k \cdot u)' = k \cdot u'}$

exple : $\left(3x^2\right)' = 3\left(x^2\right)' \overset{\text{dérivée}}{=} 3 \cdot 2x = 6x$

$$\left(\frac{2}{x}\right)' = 2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2}$$

dérivée

2) $f'(x) = \left(u(x) + v(x)\right)' = \boxed{(u+v)' = u' + v'}$

exple : $\left(3x^2 + 5x\right)' = \left(3x^2\right)' + (5x)' = 6x + 5$

dérivée

ex 2.7.12

2.7.17

## Ex 2.7.17

a) $f'(x) = 0$

b) $f'(x) = 3$

c) $f'(x) = 5x^4$

## Ex 2.7.12

a) $f'(x) = -2x+1$